



# **Revista Goiás**

**2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> série**

**Matemática**  
**Caderno do Estudante**

**Janeiro - 2023**

## AULA 1 – FIGURAS SEMELHANTES

**Descriptor SAEB:** *D1 - Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.*

**Objetos de conhecimento desenvolvidos:**

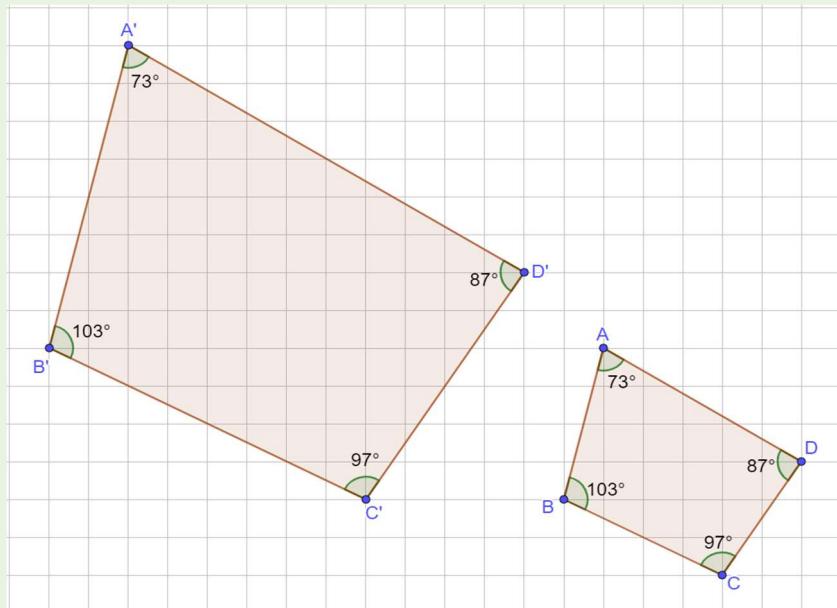
- Figuras semelhantes;
- Razão de semelhança;
- Proporção;
- Semelhança de triângulos.



### Relembrando

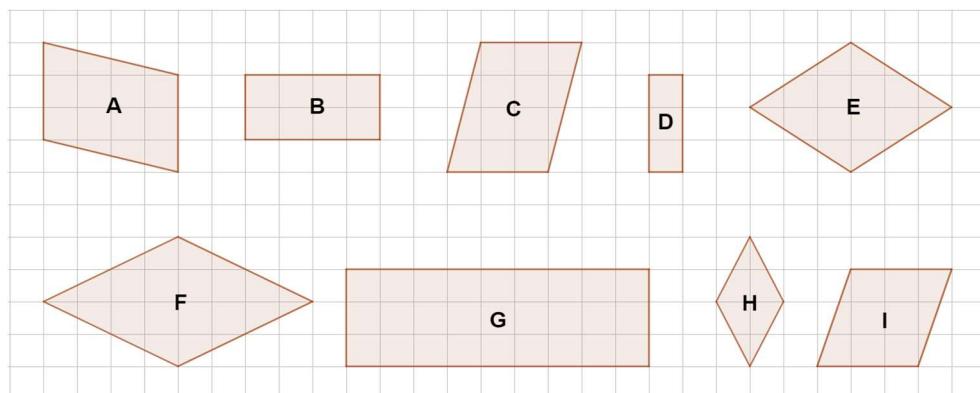
Figuras semelhantes são aquelas que têm os lados correspondentes proporcionais e os ângulos correspondentes congruentes.

Os quadriláteros ABCD e A'B'C'D' a seguir são semelhantes.



Indicamos por  $ABCD \sim A'B'C'D'$ .

1. Observe as figuras na malha quadriculada a seguir.



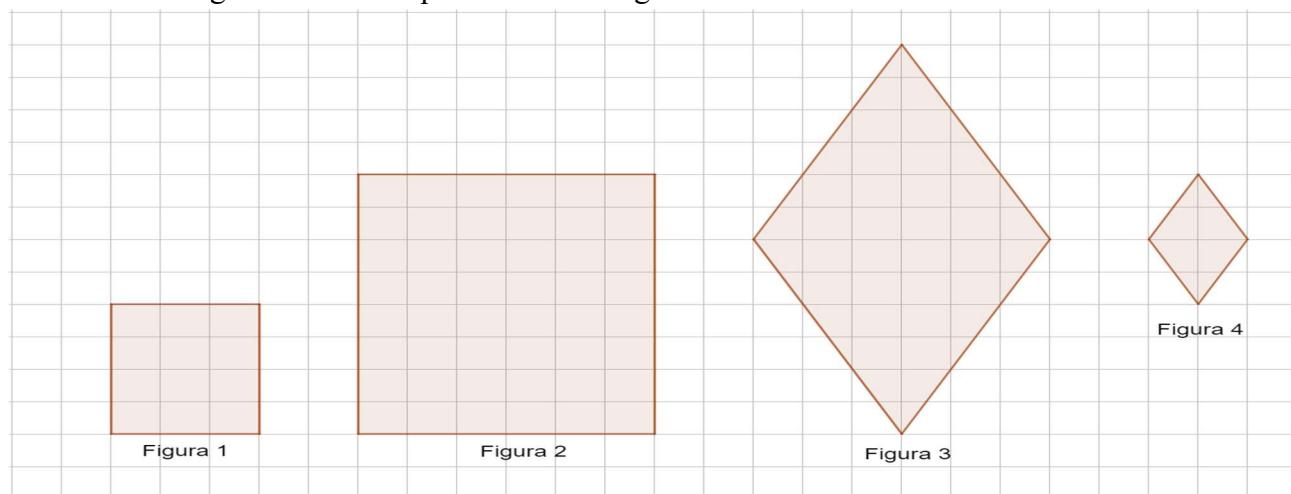
Analisando as situações de ampliação, congruência e redução entre essas figuras, complete as lacunas das frases seguintes.

O polígono A é \_\_\_\_\_ ao polígono C, pois possuem bases e alturas \_\_\_\_\_.

O polígono H é uma \_\_\_\_\_ do polígono \_\_\_, pois as medidas de suas dimensões são \_\_\_\_\_ das medidas das dimensões do polígono \_\_\_.

O polígono \_\_\_ é uma ampliação do polígono \_\_\_, pois as medidas das suas dimensões são \_\_\_\_\_ das medidas das dimensões do polígono \_\_\_.

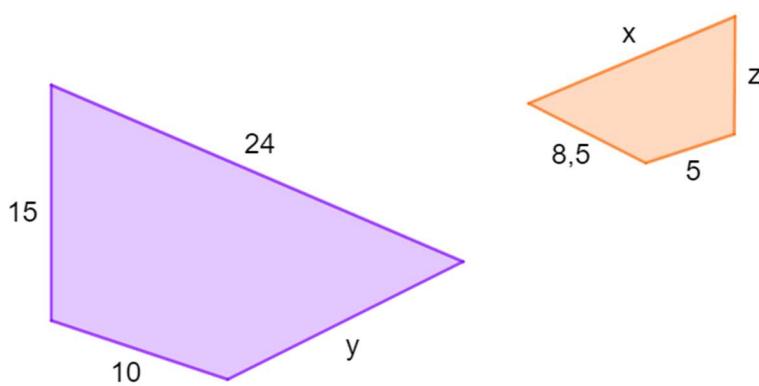
2. Observe as figuras na malha quadriculada a seguir.



Utilizando o software Geogebra ou régua e transferidor meça os ângulos e os lados de cada uma dessas figuras e depois responda:

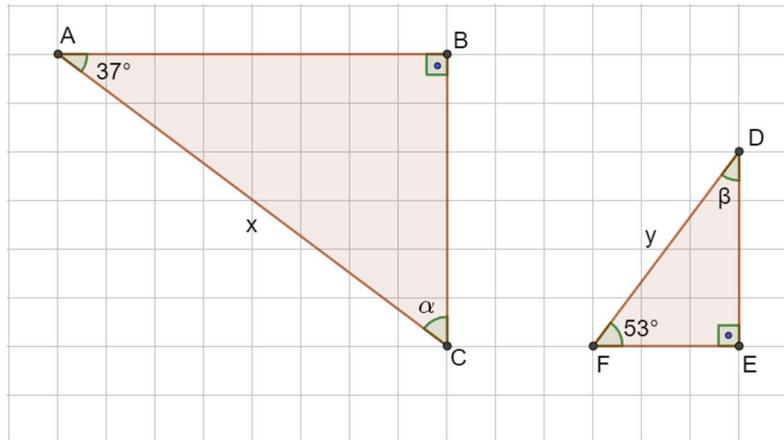
- O que você observa em relação aos ângulos e aos lados das figuras 1 e 2?
- O que você observa em relação aos ângulos e aos lados das figuras 3 e 4?
- Qual é a razão entre os lados das figuras 1 e 2?
- Qual é a razão entre as diagonais das figuras 3 e 4?
- O que é possível afirmar em relação às formas das figuras 1 e 2?
- O que é possível afirmar em relação às formas das figuras 3 e 4?

3. Considere os polígonos a seguir.



Sabendo que esses polígonos são semelhantes, determine os valores de x, y e z.

4. Observe os triângulos a seguir.



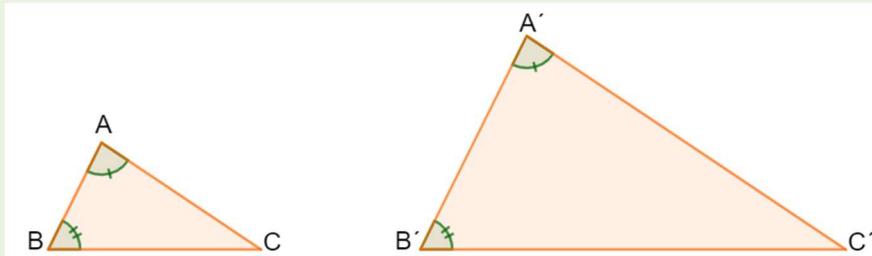
- Lembrando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a  $180^\circ$ , determine  $\alpha$  e  $\beta$ .
- Utilizando o teorema de Pitágoras, determine as medidas de  $x$  e  $y$ .
- Os triângulos ABC e DEF são semelhantes? Justifique sua resposta.



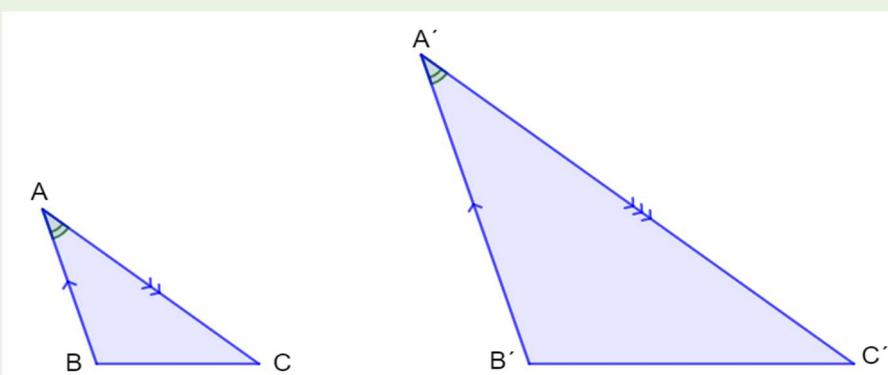
### Relembrando

Para saber se dois triângulos são semelhantes, basta verificar se um dos **casos de semelhança**, listados a seguir, é satisfeito.

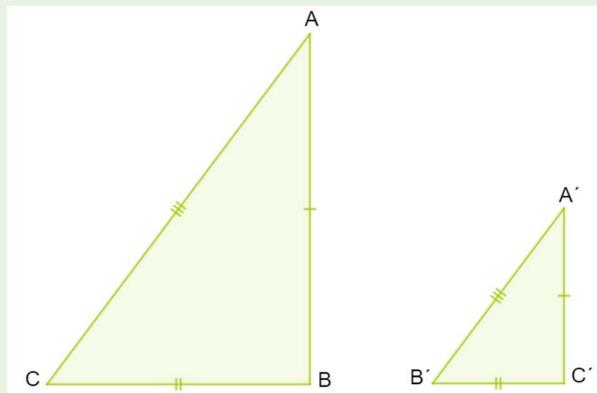
**Caso AA (ângulo-ângulo):** se 2 pares de ângulos internos correspondentes são congruentes, os triângulos são semelhantes.



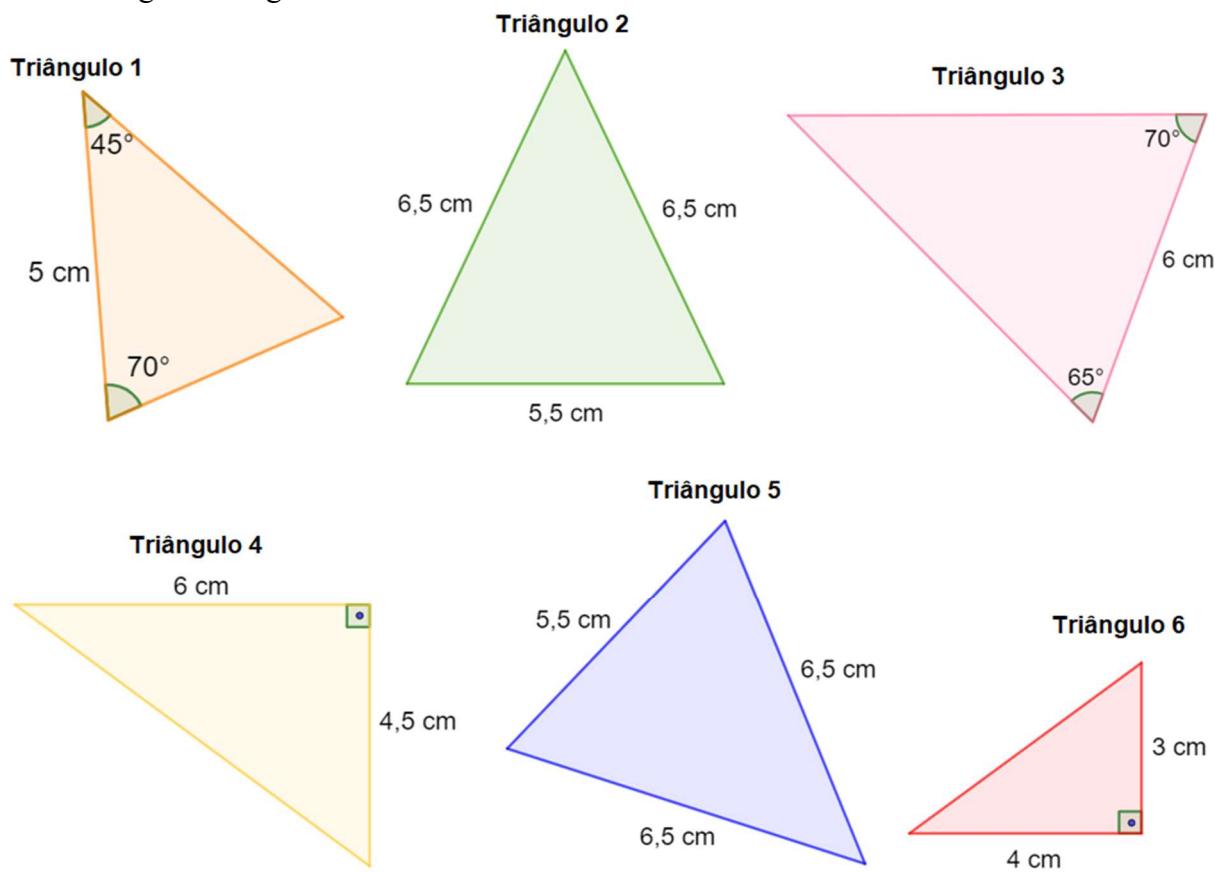
**Caso LAL (lado-ângulo-lado):** se as medidas de 2 pares de lados correspondentes são proporcionais e os ângulos internos entre esses lados são congruentes, os triângulos são semelhantes.



**Caso LLL (lado-lado-lado):** se as medidas de seus 3 pares de lados correspondentes são proporcionais, os triângulos são semelhantes.



5. Observe alguns triângulos.



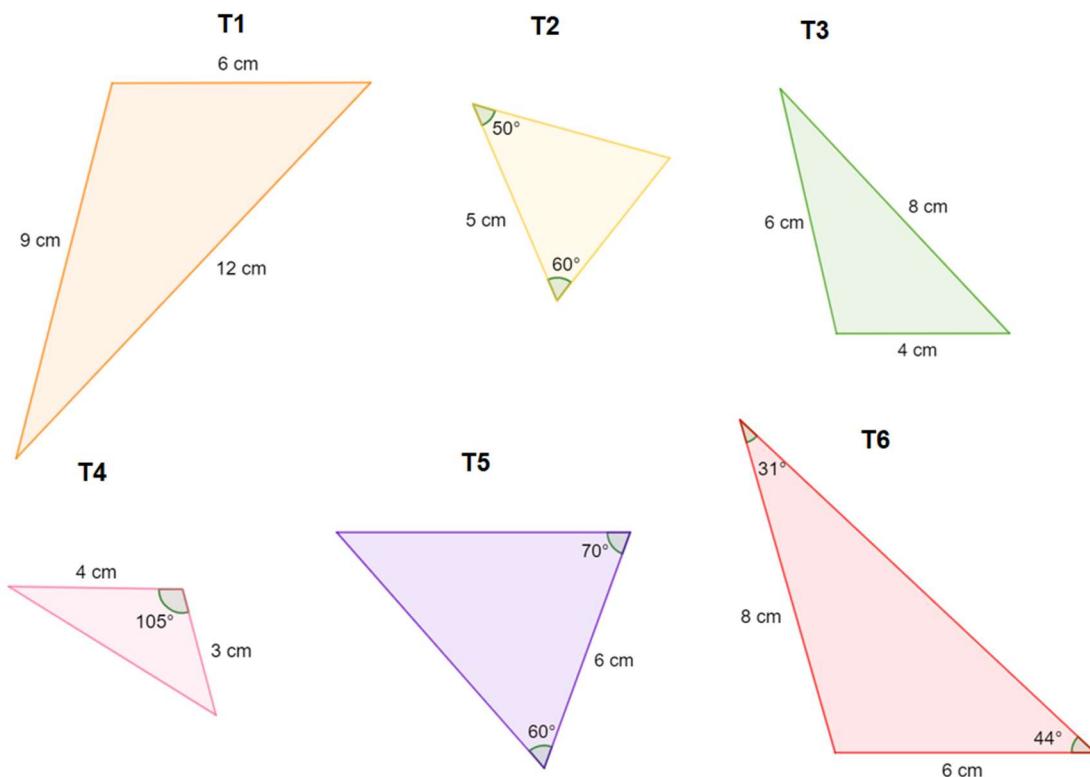
Responda:

- Quais são as medidas dadas em cada triângulo?
- Em quais triângulos são dadas as medidas dos três lados? Qual caso de semelhança é possível utilizar para verificar se eles são semelhantes? Verifique.
- Em quais triângulos são dadas as medidas de 2 lados e de 1 ângulo interno? Esse ângulo interno é o ângulo formado por esses lados? Se sim, qual caso de semelhança é possível utilizar? Verifique se são semelhantes.
- Em quais triângulos são dadas as medidas de 2 ângulos internos e de 1 lado? Nesses triângulos é possível utilizar o caso LAL de semelhança? Justifique.

e) É possível determinar a medida do outro ângulo interno nos triângulos identificados no item d? Se sim, calcule essas medidas.

f) Considerando os triângulos dos itens d e e, qual caso de semelhança é possível utilizar? Verifique se os triângulos são semelhantes.

6. Considere os triângulos a seguir.



Entre esses triângulos, os pares de triângulos semelhantes são

- A) T1 e T6; T2 e T5; T3 e T4.
- B) T1 e T2; T3 e T4; T5 e T6.
- C) T1 e T3; T2 e T5; T4 e T6.
- D) T1 e T5; T2 e T3; T4 e T6.
- E) T1 e T4; T2 e T5; T3 e T4.

## AULA 2 – RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NO PLANO CARTESIANO

**Descriptor SAEB:** D9 - Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

**Objetos de conhecimento desenvolvidos:**

- Plano cartesiano;
- Sistemas de equações polinomiais de 1º grau.



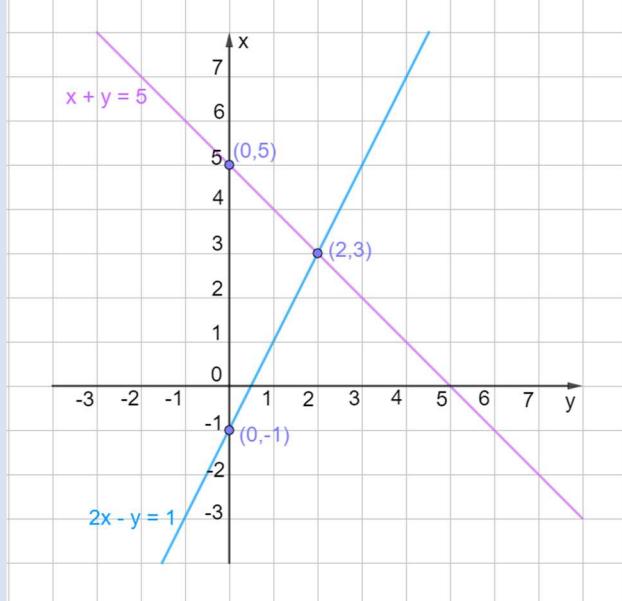
## Relembrando

É possível representar um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, e a sua solução, nas formas algébrica e geométrica. Para encontrarmos a solução de um sistema, dada sua representação algébrica, manipulamos as incógnitas para encontrar seus valores. Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Possibilidade de resolução algébrica	
Isolamos a incógnita x na primeira equação	$x = 5 - y$
Substituímos o valor de x encontrado na segunda equação.	$2(5 - y) - y = 1$
Calculamos o valor de y.	$10 - 2y - y = 1 \rightarrow -3y = 1 - 10 \rightarrow -3y = -9 \rightarrow y = 3$
Voltamos à primeira equação e substituímos o valor de y para encontrar o valor de x.	$x = 5 - 3 \rightarrow x = 2$
A solução do sistema de equações é $x = 2$ e $y = 3$	

## Representação geométrica



Em um plano cartesiano, determinamos a reta que representa cada uma das equações do sistema. O ponto de intersecção entre as retas, se existir, representa a solução do sistema.

- Se as retas são **concorrentes**, o sistema apresenta **uma única solução**, que é o ponto de intersecção entre elas.
- Se as retas são **paralelas**, o sistema **não tem solução**.
- Se as retas **são coincidentes**, o sistema possui **infinitas soluções**, que são todos os pontos pertencentes às retas determinadas pelas equações do sistema.

1. Observe os sistemas a seguir e valide as afirmações em V para verdadeiro e F para falso.

I.  $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases}$

II.  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

III.  
 $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 1 \end{cases}$

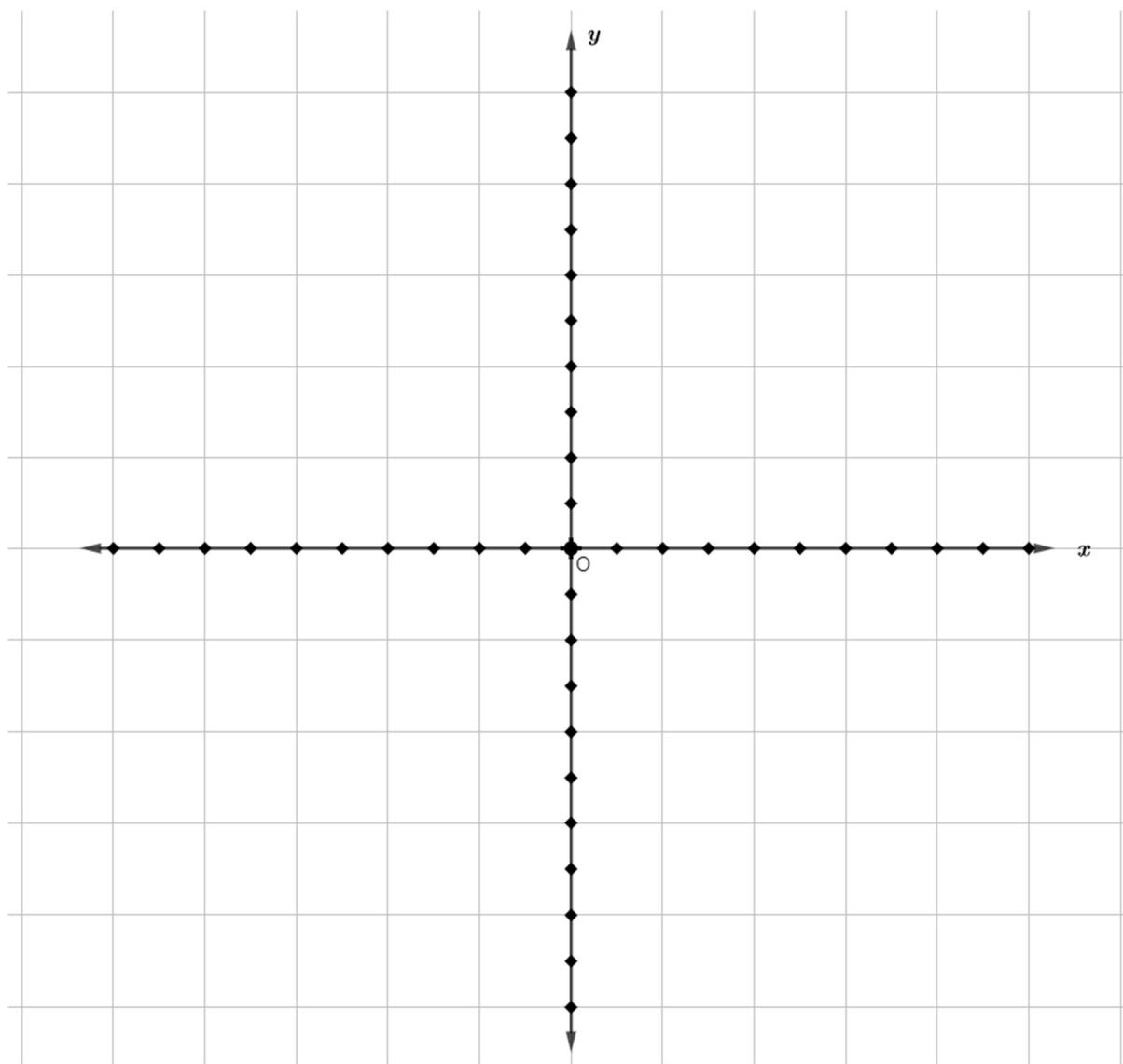
IV.  
 $\begin{cases} 3x + y = 24 \\ 5x + 2y = 60 \end{cases}$

- ( ) O par ordenado  $(3,4)$  é a solução do sistema I, pois satisfaz ao mesmo tempo as duas equações.
- ( ) O sistema II possui apenas duas soluções, que são os pares ordenados  $(1,1)$  e  $(3,5)$ .
- ( ) O sistema III é solucionado pelo par ordenado  $(5, 1)$ . Repare que ele satisfaz ambas as equações, pois  $5 - 2 \cdot 1 = 3$  e  $3 \cdot 5 - 6 \cdot 1 = 1$ .
- ( ) A solução para o sistema IV é o par ordenado  $(-12, 60)$ , pois  $3 \cdot (-12) + 60 = 24$  e  $5 \cdot (-12) + 2 \cdot 60 = 60$ .

2. Observe o sistema de equações de  $1^{\circ}$  grau com duas incógnitas a seguir.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Para representar uma reta no plano cartesiano, bastam dois pontos cujas coordenadas satisfaçam a condição dada pela equação que define essa reta. Defina dois pontos cujas coordenadas satisfaçam cada uma das equações do sistema acima e, com eles, faça a representação geométrica no plano cartesiano a seguir.

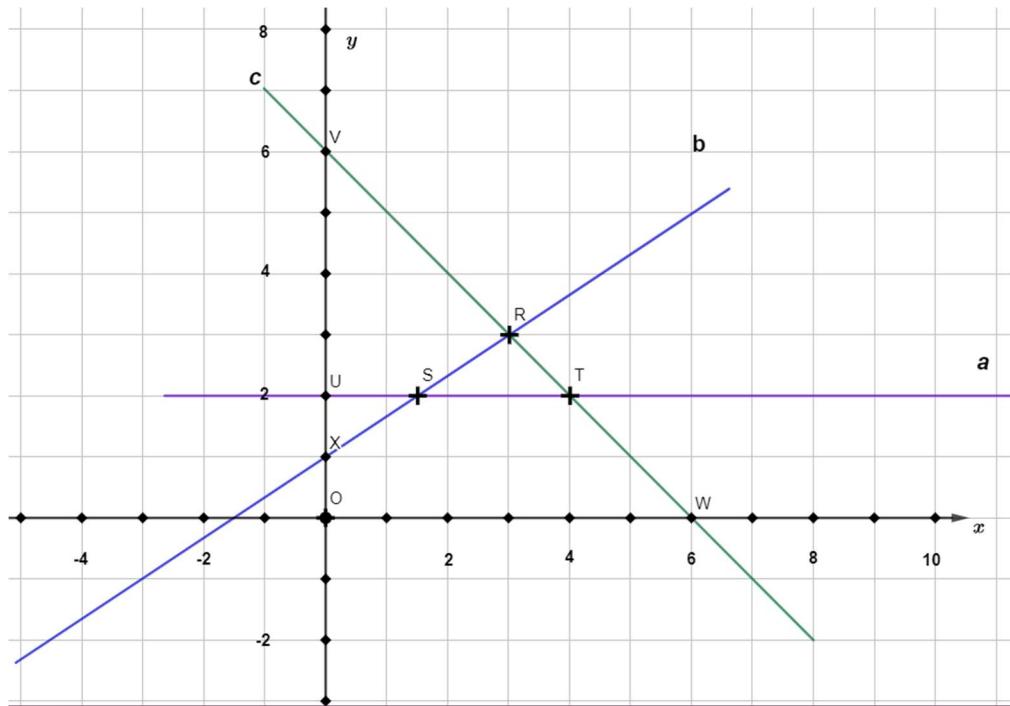


3. Complete as lacunas utilizando corretamente as palavras disponíveis na *word box* a seguir.

**retas – equações – - 9 – cartesiano – positivo – segundo – 39 –  
interceptam – negativo.**

As retas de \_\_\_\_\_  $8x + 2y = 6$  e  $2x + 2y = 60$  se \_\_\_\_\_ no par ordenado x = \_\_\_\_\_ e y = \_\_\_\_\_. O ponto de intersecção dessas \_\_\_\_\_ se localiza no \_\_\_\_\_ quadrante do plano \_\_\_\_\_, pois o valor de x é \_\_\_\_\_ e o valor de y é \_\_\_\_\_.

4. Observe, no plano cartesiano a seguir, as retas **a**, **b** e **c** e os pontos O, R, S, T, U, V, X e W, e depois, valide as afirmações em V para afirmações verdadeiras e F para afirmações falsas.



- ( ) As soluções dos sistemas de equações representados pelas retas **a** e **b** e **b** e **c**, são , respectivamente, os pontos S e R.
- ( ) As soluções dos sistemas de equações representados pelas retas **c** e **a** e **b** e **c** são , respectivamente, os pontos W e X.
- ( ) As soluções dos sistemas de equações representados pelas retas **c** e **a** e **a** e **b**, são , respectivamente, os pontos T e S.
- ( ) As soluções dos sistemas de equações representados pelas retas **y** e **a**, **c** e **x** e **x** e **y**, são , respectivamente, os pontos U, W e O.



## Relembrando

Há dois métodos para resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.

### Método da adição

**1º passo:** Observamos se nas equações do sistema há termos com coeficientes opostos (por exemplo, se em uma equação há o termo  $x$  e na outra,  $-x$ );

**2º passo:** Adicionamos as equações do sistema membro a membro. A incógnita que aparecer com os termos opostos é eliminada, e resolvemos a equação obtida.

**3º passo:** Substituímos o valor obtido em qualquer uma das equações para obter o valor da outra incógnita.

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

1º passo	2º passo	3º passo
$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$ Aparecem os termos $y$ e $-y$	$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$ $2x = 6 \rightarrow x = 3$	$x + y = 7$ $3 + y = 7 \rightarrow y = 7 - 3$ $\rightarrow y = 4$
Portanto, a solução do sistema é $x = 3$ e $y = 4$ ou seja $(3, 4)$		

### Método da substituição

**1º passo:** Escolhemos uma das equações do sistema e isolamos uma das incógnitas.

**2º passo:** Substituímos na outra equação a incógnita isolada e resolvemos a equação obtida.

**3º passo:** Substituímos o valor obtido em qualquer uma das equações para obter o valor da outra incógnita.

Exemplo:

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

1º passo	2º passo	3º passo
$x - 2y = 4$ $x = 4 + 2y$	$3x + y = 5$ $3 \cdot (4 + 2y) + y = 5$ $12 + 6y + y = 5$ $7y = 5 - 12$ $7y = -7$ $y = -1$	$x - 2y = 4$ $x - 2 \cdot (-1) = 4$ $x + 2 = 4$ $x = 4 - 2$ $x = 2$
Portanto, a solução do sistema é $x = 2$ e $y = -1$ ou seja $(2, -1)$		

5. Utilizando o método indicado, resolva os sistemas de equações de 1º grau a seguir identificando o par ordenado que satisfaz ambas as equações.

a) Método da Substituição

$$\text{I. } \begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{II. } \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 3y = -13 \end{cases}$$

b) Método da Adição

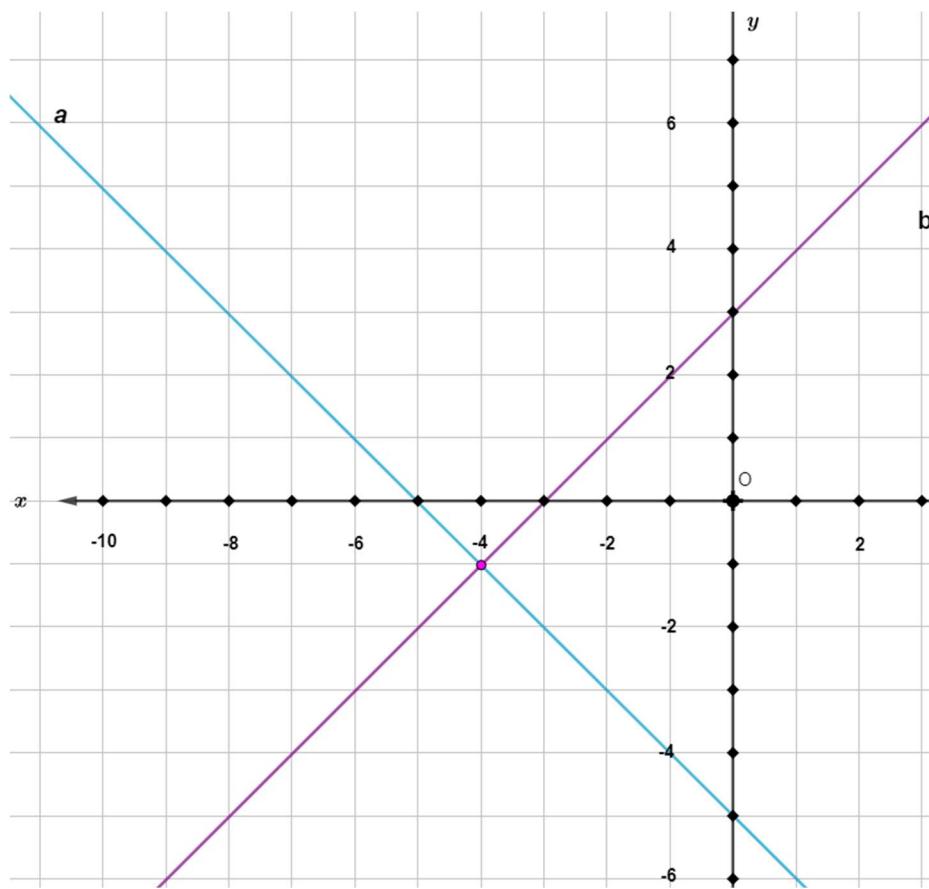
$$\text{I. } \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 12 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{II. } \begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

6. Imagine que um simulado de matemática é composto por 20 questões classificadas em verdadeiras e falsas. O número de questões verdadeiras é superior ao número de questões falsas em 4 unidades. Considere que  $x$  represente o número de questões verdadeiras e  $y$  o número de questões falsas.

Em relação a essa situação, responda:

- a) Qual é o sistema de equações de 1º, com as incógnitas  $x$  e  $y$ , associado a esse problema?
- b) Resolva o sistema encontrado na alternativa anterior.
- c) Qual foi o par ordenado encontrado na resolução deste sistema de equações?
- d) Substitua o par ordenado encontrado e verifique se ele satisfaz as duas equações.

7. Considere a representação geométrica de um sistema de equações de 1º grau a seguir.



- a) Qual é o par ordenado que representa a solução desse sistema?
- b) Verifique se o sistema de equações de 1º grau a seguir corresponde a essa representação geométrica.

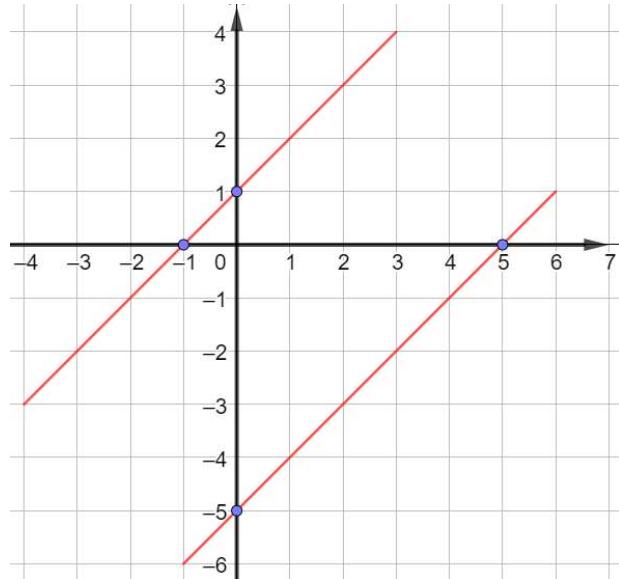
$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ 12x + 7y = 50 \end{cases}$$

8. Um sistema de equações do 1º grau é dado por

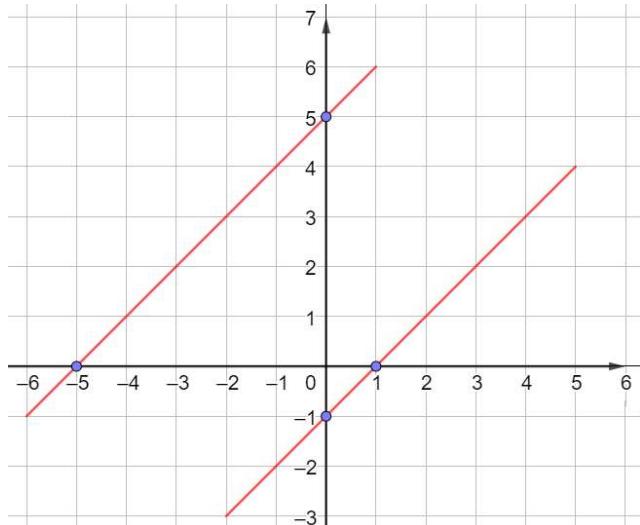
$$\begin{cases} x + y = -5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Qual é o gráfico que representa esse sistema?

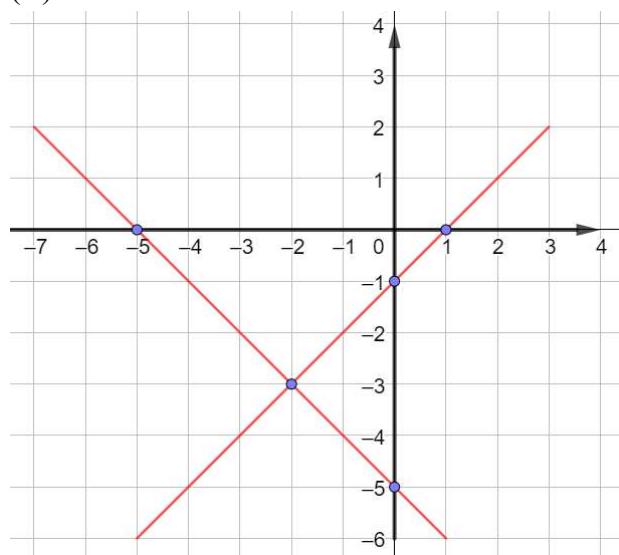
(A)



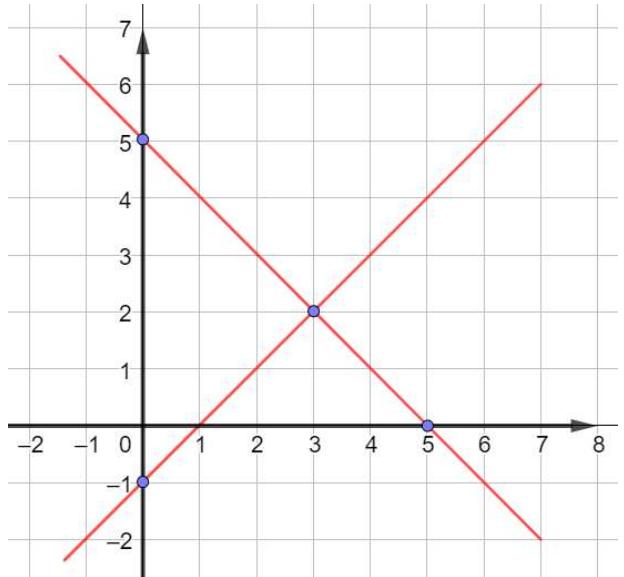
(C)



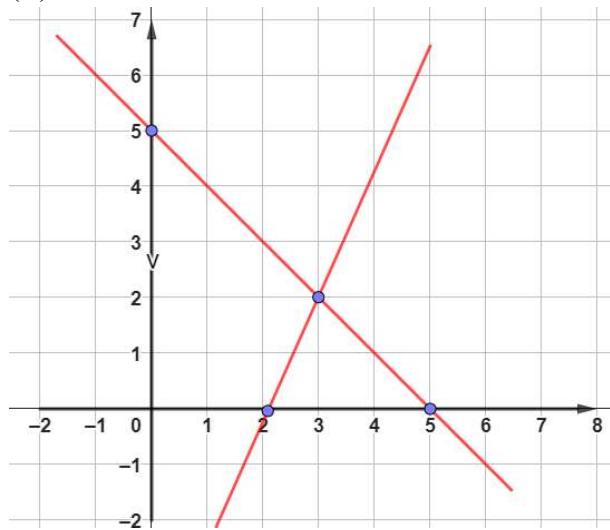
(B)



(D)



(E)



## AULA 3 – PROPORÇÕES E GRANDEZAS

**Descriptor SAEB:** *D15 - Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.*

**Objetos de conhecimento desenvolvidos:**

- Unidades de medida
- Razão e proporção
- Grandezas diretamente ou inversamente proporcionais
- Regra de três simples ou composta

### Relembrando

Analisando duas grandezas que se relacionam, dizemos que são grandezas **diretamente proporcionais** se variarem sempre na **mesma razão**. Ou seja, ao dobrarmos o valor de uma delas, o valor correspondente da outra também dobra; ou, ao reduzirmos pela metade o valor de uma dessas grandezas, o valor correspondente da outra também se reduz à metade.

Observe no quadro a seguir a quantidade de páginas que uma impressora consegue imprimir de acordo com o tempo de operação.

<b>Tempo (em minutos)</b>	1	2	6	10
<b>Número de páginas</b>	20	40	120	200

Dizemos que o número de páginas é diretamente proporcional ao tempo de operação da impressora. A variação dessas grandezas pode ser representada pela seguinte igualdade:

$$\frac{20}{1} = \frac{40}{2} = \frac{120}{6} = \frac{200}{10} = 20$$

Já duas grandezas que se relacionam são **inversamente proporcionais** se variam sempre na **razão inversa** uma da outra. Ou seja, ao dobrarmos o valor de uma delas, o valor da outra fica reduzido pela metade; ou ao reduzirmos pela metade o valor de uma dessas grandezas, o valor correspondente da outra dobra.

Consideremos que para esvaziar totalmente uma piscina com um ralo aberto leve 24 horas. Observe no quadro a seguir o tempo necessário para esvaziar essa piscina se forem abertos outros ralos com a mesma vazão do primeiro.

Número de ralos	1	2	3	4
Tempo (em horas)	24	12	8	6

Dizemos que o tempo necessário para esvaziar a piscina é inversamente proporcional à quantidade de ralos abertos.

A variação dessas grandezas pode ser representada pela seguinte igualdade:

$$\frac{1}{24} = \frac{2}{12} = \frac{3}{8} = \frac{4}{6} = 24$$

1. Para esvaziar um reservatório que tinha 12 000 litros de água, Mário usou um instrumento de sucção que absorve, continuamente, 300 litros de água a cada 30 minutos.

Observe as afirmações contidas na tabela abaixo e valide-as em (V) para afirmações verdadeiras ou (F) para afirmações falsas.

- I. ( ) As grandezas envolvidas nessa situação problema são capacidade e tempo.
- II. ( ) As unidades envolvidas nessa situação problema são minutos e metros.
- III. ( ) Mário esvaziou o reservatório em menos de 24 horas.
- IV. ( ) As grandezas envolvidas na situação problema são inversamente proporcionais.

2. Observe a figura e a caixa de palavras a seguir e complete o texto subsequente a ela utilizando as palavras contidas da caixa.

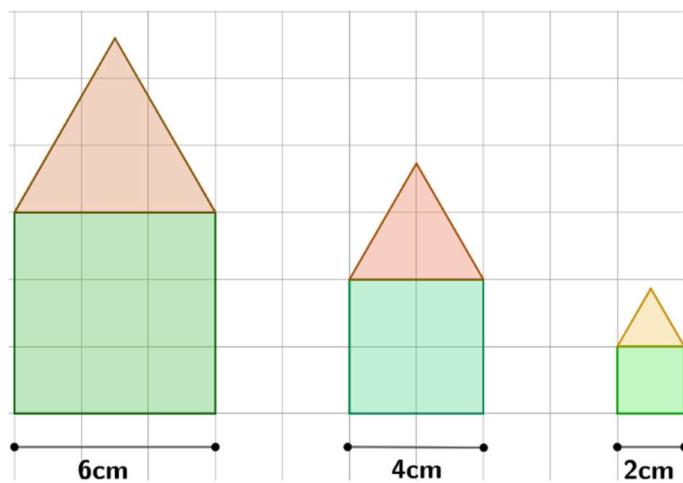


Figura elaborada pelo autor

**DIRETAMENTE – PROPORCIONAIS – REGULARES – POLÍGONOS  
EQUILÁTEROS – QUADRADOS – TODOS – PERÍMETRO**

Os contornos das formas contidas na imagem anterior são \_\_\_\_\_ regulares, ou seja, são compostas por \_\_\_\_\_ e triângulos \_\_\_\_\_.

Os perímetros dos triângulos equiláteros são \_\_\_\_\_ proporcionais as medidas de seus lados, pois, quanto maior a medida de seu lado, maior é o \_\_\_\_\_ desse polígono. A mesma coisa acontece com os quadrados, se as medidas de seus lados aumentarem, o seu perímetro também aumentará.

Esse fenômeno acontece com \_\_\_\_\_ os polígonos \_\_\_\_\_, o que faz com que a relação entre a medida dos lados e seus respectivos perímetros sejam diretamente \_\_\_\_\_.

3. Observe o esquema que apresenta o desperdício de água de uma torneira com defeito.

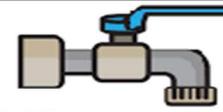
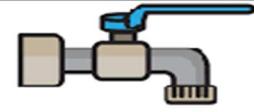
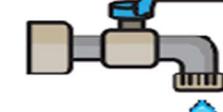
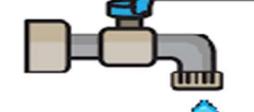
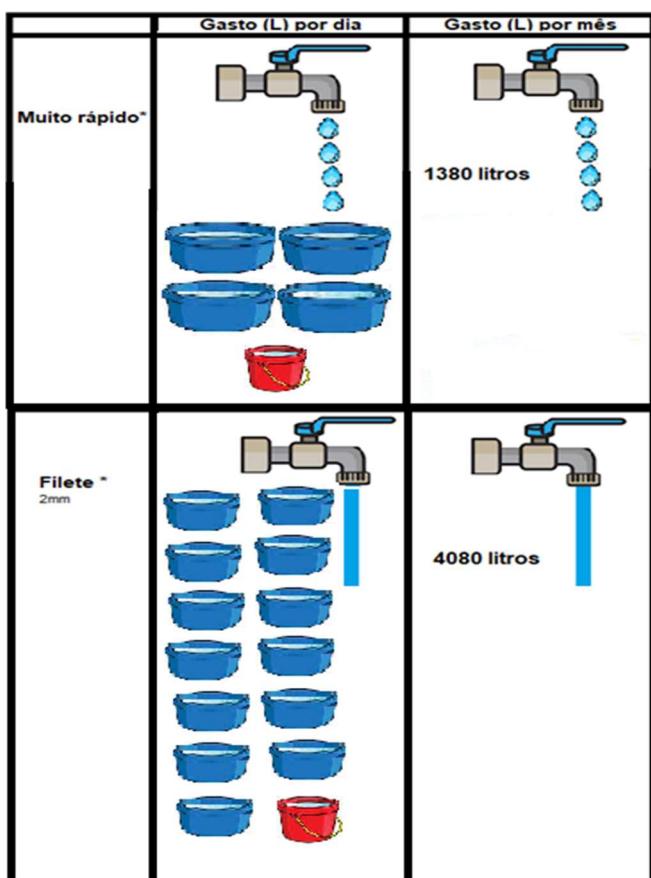
	Gasto (L) por dia	Gasto (L) por mês
Lento*	 10 litros	 300 litros
Médio*	 20 litros	 600 litros

Figura elaborada pelo autor

De acordo com as informações contidas no esquema, responda o que se pede.

- Quais são as grandezas que se relacionam na figura anterior?
- Pode-se afirmar que existe uma relação de proporcionalidade entre as grandezas indicadas na figura anterior? Justifique.
- Considere uma situação particular da torneira analisada anteriormente.



  $\rightarrow 0,01\text{m}^3$   
  $\rightarrow 0,006\text{m}^3$

Pode-se afirmar que a relação de gastos ( $L$ ) de uma torneira com gotejamento muito rápido é, de alguma maneira, proporcional a uma torneira (2mm) com gasto em filete? Justifique.

4. A tabela abaixo apresenta o consumo médio ( $C$ ) de um combustível de certo veículo, em função da distância percorrida ( $D$ ).

Consumo em litros ( $C$ )	0,35	2,1	4,55	8,05
Distância percorrida em km ( $D$ )	2	12	26	46

Com base nos dados contidos na tabela acima complete as afirmações a seguir.

- As unidades de medida relacionadas na tabela anterior são \_\_\_\_\_ e litros.
- As grandezas relacionadas na tabela anterior são comprimento e \_\_\_\_\_.
- Podemos afirmar que existe uma relação de proporcionalidade entre as grandezas indicadas, e essa relação é \_\_\_\_\_ proporcional.
- Se a distância percorrida for de 19 quilômetros, o consumo será de \_\_\_\_\_ litros.
- As grandezas relacionadas não são \_\_\_\_\_ proporcionais pois quanto maior a distância a ser percorrida maior será o consumo em \_\_\_\_\_ de combustível.

5. Classifique as grandezas envolvidas em cada problema a seguir, em diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

a) Um automóvel está a uma velocidade de 50 km/h e gasta duas horas para chegar a seu destino. Esse mesmo automóvel gastaria quantas horas se estivesse a 75 km/h?

---

b) Para percorrer 300 km, um carro gastou 30 litros de combustível. Nas mesmas condições, com 60 litros o carro percorrerá quantos quilômetros?

---

c) Seis máquinas escavam um túnel em dois dias. Quantas máquinas idênticas serão necessárias para escavar esse túnel em um dia e meio?

d) O preço de 2 latas de um certo refrigerante é igual a R\$5,60. Qual o preço de três latas do mesmo refrigerante?

---

e) Sabemos que a densidade de uma substância é calculada pela razão entre a massa e o volume. Se determinada substância possui  $2 \text{ cm}^3$  de volume, com densidade de  $100 \text{ g/cm}^3$ , tendo a mesma massa, qual deve ser o volume de uma outra substância para que a sua densidade seja de  $80 \text{ g/cm}^3$ ?

6. Marta recorreu à bula para verificar a dosagem de um remédio que precisava dar a seu filho Miguel. Na bula, recomendava-se a seguinte dosagem: 10 gotas para cada 4kg de massa corporal a cada 12 horas. Se Marta ministrou corretamente, 45 gotas do remédio a seu filho a cada 12 horas, então qual é a massa corporal de Miguel?

7. A família Souza resolveu fazer uma viagem de 5 horas saindo da cidade **A** até a cidade **D** com duas paradas pelo caminho. Observe os dados que a filha do caçula coletou durante o trajeto.

Grandezas	<i>Cidade A</i>	<i>Cidade B</i>	<i>Cidade C</i>	<i>Cidade D</i>
Distância percorrida em km ( <b>D</b> )	0	120	300	?
Tempo em minutos ( <b>T</b> )	0	70	175	300

De acordo com os dados coletados pela filha mais nova, qual será a distância percorrida após 300, minutos? Construa um gráfico que relate a proporcionalidade entre as grandezas.

8. O muro da casa de Beth foi construído por 2 operários em 6 dias.

Observe as afirmações a seguir e valide-as em (V) para afirmações verdadeiras ou (F) para afirmações falsas.

- ( ) Se ela tivesse contratado 6 operários, que trabalhassem nas mesmas condições, o muro estaria pronto em dois dias.
- ( ) Se ela tivesse contratado 12 operários, que trabalhassem nas mesmas condições, o muro estaria pronto em 15 horas.
- ( ) Se ela tivesse contratado 4 operários, que trabalhassem nas mesmas condições, o muro estaria pronto em três dias.
- ( ) Se ela tivesse contratado 8 operários, que trabalhassem nas mesmas condições, o muro estaria pronto em um dia.

9. Oito marinheiros carregam 20 containers para um navio em 5 dias. Quantos containers serão carregados em 16 dias, por 4 marinheiros?

10. Para produção de uma peça mecânica, uma empresa automotiva possui 10 máquinas com produtividades idênticas que produzem 520 peças em 10 dias, operando 8 horas por dia. Sabendo que 4 máquinas deram defeito, qual será a quantidade de peças produzidas durante 20 dias se as máquinas restantes operarem durante 20 horas?

11. Katy contratou 15 operários para construir sua casa. Esses operários levarão 110 dias para terminar a construção se trabalharem 6 horas por dia. Porém, após um acidente na obra, 5 operários se ausentaram da construção. Se mantiverem o ritmo de trabalho, e trabalharem 8 horas por dia, em quantos dias o restante dos operários construirá a casa de Katy?

12. Observe o gráfico abaixo e responda o que se pede

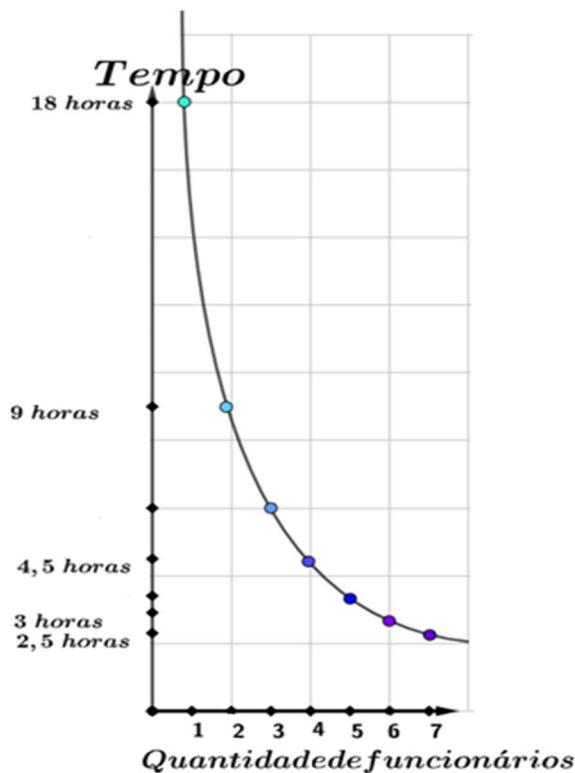


Figura criada pelo autor

- a) As grandezas presentes no gráfico anterior, são direta ou inversamente proporcionais? Justifique.  
 b) Complete a tabela abaixo de acordo com os dados obtidos no gráfico anterior

Quantidade de funcionários (x)	Tempo (y)
1	18 horas
2	9 horas
3	
4	4,5 horas
5	
6	3 horas
7	2,5 horas

c) Com base nos dados numéricos obtidos nas questões anteriores, crie uma situação problema relacionando as grandezas e dados numéricos de modo a validar a proporcionalidade entre eles.

13. Em um ano de eleição, um candidato encomendou quarenta e oito mil santinhos em uma gráfica. O dono da empresa, avisou ao candidato que realizaria o serviço em seis dias, pois tinha em sua posse apenas duas máquinas que trabalhavam oito horas por dia. O candidato então, resolveu fazer vinte e quatro mil folhetos a mais no intuito de ajudar o empresário, porém, uma de suas máquinas pifou, e ele, na intenção de entregar os santinhos o mais depressa possível, resolveu aumentar a produtividade da máquina para 12 horas por dia.

Desta forma, o dono da gráfica entregará os santinhos ao candidato em

A) 10 dias.

B) 12 dias.

C) 14 dias.

D) 16 dias.

E) 18 dias.