MARATONA REVISA

3ª série

MATEMÁTICA

Caderno do Estudante

Revisa Goiás

SEDUC
Secretaria de Estado da Educação

GOVERNO DE GOIÁS
O ESTADO QUE DÁ CERTO

Junho - 2023

Semanas 1 e 2– Análise Combinatória

Descritor SAEB: D32 – Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.

Objetos de conhecimento desenvolvidos:

- Fatorial;
- Princípio fundamental da contagem;
- Permutação;
- Arranjo simples;
- Combinação.

RELEMBRANDO FATORIAL

O fatorial de um número (natural) é a multiplicação desse número por todos os seus antecessores naturais maiores que zero. Para representar o fatorial de um número, escrevemos o número seguido de um ponto de exclamação, ou seja, n! (lê-se “n fatorial”).

Por exemplo, o fatorial do número 4 é representado por 4! (4 fatorial), que é a multiplicação de 4 pelos seus antecessores naturais não nulos, ou seja, **4·3·2·1=24.**

Uma importante aplicabilidade do estudo do número fatorial é o seu uso na análise combinatória, onde é recorrente a multiplicação de um número natural pelos seus antecessores. Por definição, tem-se que: **0!=1 e 1!=1.**

Exemplo: **5! = 5 · 4 · 3 · 2 · 1= 120**

PFC – Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo)

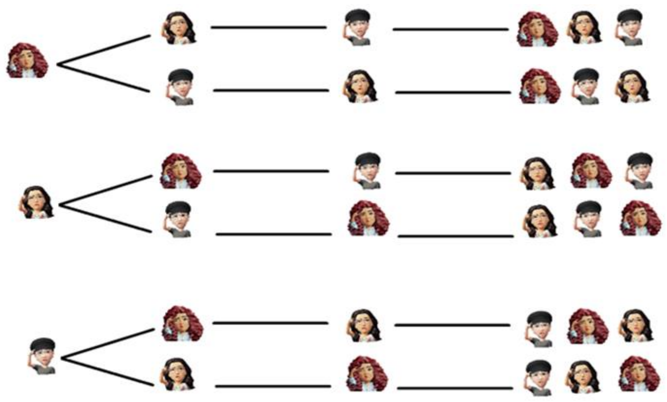
A análise combinatória é a parte da matemática que analisa a quantidade de agrupamentos possíveis para determinadas situações, e o princípio fundamental da contagem (princípio multiplicativo) é um dos processos que se utiliza para calcular o total de combinações possíveis nesses agrupamentos.

O princípio determina que se uma decisão d_1 pode ser tomada de $n_1$maneiras, e outra decisão d_2 pode ser tomada de $n_2$maneiras, sendo essas decisões independentes, então, o número de maneiras que essas duas decisões podem ser tomadas é calculado pelo produto $\boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{n_2}$. Em outras situações, a quantidade de decisões pode ser maior do que duas.

Exemplo 1: De quantas maneiras pode-se organizar três pessoas em uma fila?
1ª decisão: escolher quem vai ficar em 1º lugar na fila: 3 possibilidades, pois são 3 pessoas.
2ª decisão: escolher quem vai ficar em 2º lugar na fila: 2 possibilidades, pois 1 pessoa já ocupou o 1º lugar.
3ª decisão: escolher quem vai ficar em 3º lugar na fila: 1 possibilidade, pois 2 pessoas já ocuparam os dois primeiros lugares.

1ª decisão	*2ª decisão*	*3ª decisão*
3 possibilidades *Pessoa* *Pessoa* *Pessoa*	*2 possibilidades* ~~*Pessoa*~~ *Pessoa* *Pessoa*	*1 possibilidade* ~~*Pessoa*~~ ~~*Pessoa*~~ *Pessoa*

Pela árvore de possibilidades:



Pelo PFC (princípio fundamental da contagem): $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras diferentes.

Exemplo 2: De quantas maneiras pode-se organizar cinco pessoas em uma fila?
Pelo PFC (princípio fundamental da contagem): 5·4·3·2·1=120 maneiras diferentes.

O princípio multiplicativo é uma ferramenta que resolve grande parte dos problemas de contagem, porém a sua aplicação direta na resolução de problemas nem sempre pode ser tão simples.
No entanto, alguns problemas possuem características em comum e são recorrentes. Dessa forma, esses agrupamentos serão caracterizados e estudados separadamente a seguir.

Princípio Aditivo

Se um evento $e_1$tem $n_1$possibilidades distintas de ocorrer e um evento e_2 tem $n_2$possibilidades distintas de ocorrer, e esses eventos são mutuamente exclusivos (não acontecem ao mesmo tempo), então, o número total de possibilidades de pelo menos um dos eventos acontecer é dado por $n_1 + n_2$.

O princípio aditivo da contagem realiza a união dos elementos de dois ou mais conjuntos. Isso porque a adição (+) e a união (U) relacionam-se, pois em ambos os operadores há a reunião de elementos. O princípio aditivo tem a sua origem na teoria dos conjuntos, que estudam as propriedades que estabelecem as relações entre os próprios conjuntos e entre os elementos dos conjuntos. Veremos a seguir a definição para o princípio aditivo da contagem.

Definição: Considerando A e B como conjuntos finitos disjuntos, ou seja, com a sua intersecção vazia, a união do número de elementos é dada por:

n (A U B) = n (A) + n (B)

Exemplo: Em uma entrevista sobre qual cor se prefere entre o azul e o amarelo, 20 entrevistados responderam que preferem a cor azul e 80 responderam que preferem a cor amarela. Calcule o número total de entrevistados.

Conjunto A: pessoas que preferem azul → $\boldsymbol{n(A) = 20}$

Conjunto B: pessoas que preferem amarelo → $\boldsymbol{n(B) = 80}$

$$\rightarrow \boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 20 + 80 = 100}$$

Se os conjuntos não fossem disjuntos, teríamos uma intersecção, que é dada pelos elementos que estão presentes em mais de um conjunto ao mesmo tempo. Quando esse tipo de situação ocorrer, a definição para o princípio aditivo da contagem será a seguinte:

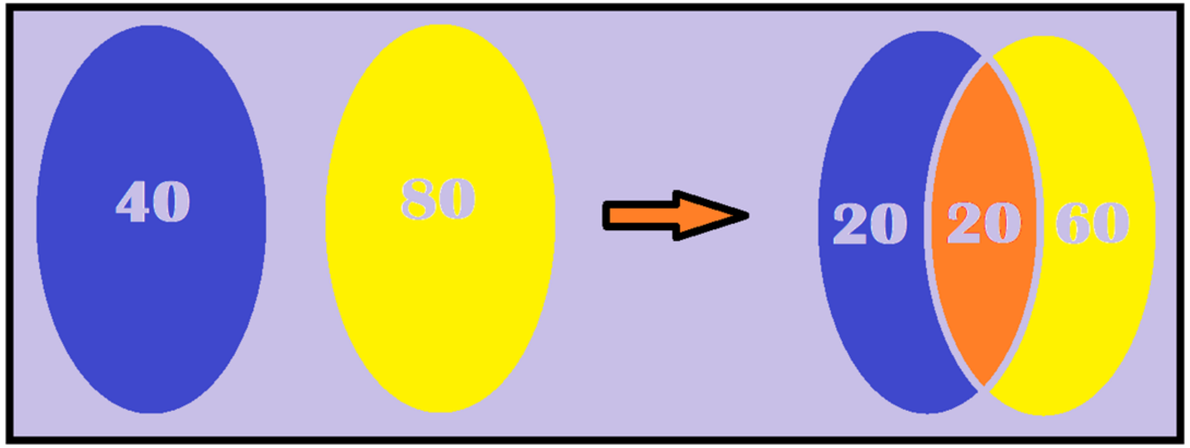
Definição: Considere A e B como conjuntos finitos. O número de elementos dado pela união entre esses conjuntos é representado da seguinte forma:

n (A ∪ B) =n (A) + n (B) - n (A ∩ B)

Exemplo: Em uma entrevista sobre qual cor se prefere entre o azul e o amarelo, 40 entrevistados responderam que preferem a cor azul, 80 responderam que preferem a cor amarela e 20 responderam que gostam das duas cores. Calcule o número total de entrevistados.

Conjunto A: pessoas que preferem azul → $\boldsymbol{n(A) = 40}$

Conjunto B: pessoas que preferem amarelo → $\boldsymbol{n(B) = 80}$



Conjunto **(A∩B)**: pessoas que gostam das duas cores → $\boldsymbol{n(A \cap B) = 20}$

$\rightarrow \boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 40 + 80 - 20 = 100}$

Permutação simples

Permutação simples é qualquer agrupamento que se pode formar com todos os elementos disponíveis no problema, usando cada um deles uma única vez, e que se diferenciam um do outro apenas pela posição em que esses elementos aparecem no agrupamento.

O número de permutações simples é representado por P_n , sendo que $P_n = n!$, onde n é o número de elementos disponíveis.

Exemplo:

Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 2; 3; 4 e 5?

$$\boldsymbol{P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24} \textbf{ números.}$$

Permutação com repetição

Uma permutação com elementos repetidos acontece quando em um agrupamento de n elementos, alguns desses são iguais. Na fórmula para determinar o número de permutações com repetição, dividimos o fatorial de n pelo produto dos fatoriais dos números de elementos que se repetem.

O número de permutações com repetição é representado por $P_n^{x_1,x_2,\dots,x_i}$, sendo que

$$P_n^{x_1,x_2,\dots,x_i} = \frac{n!}{x_1! \cdot x_2! \cdot \dots \cdot x_i!}$$

onde n é o número total de elementos, e $x_1, x_2, \dots, x_i$ são os números dos elementos que se repetem.

Exemplo: Quantos são os anagramas que podemos formar com a palavra REVISA?
Observação: Em Matemática, permutações entre as letras de uma palavra, entre os números de uma sequência, entre os elementos de um conjunto e assim por diante são chamadas de anagramas.

No caso da palavra REVISA, não temos letras que se repetem, então o número de anagramas será obtido por meio **de uma permutação simples:**

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ anagramas.}$$

Exemplo: Quantos são os anagramas que podemos formar com a palavra ARARA?
No caso da palavra ARARA, temos a letra A que se repete três vezes, e a letra R que se repete duas vezes, então, o número de anagramas será obtido por meio **de uma permutação com repetição**:

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10 \text{ anagramas.}$$

Arranjo simples

Arranjo simples é qualquer agrupamento que se pode formar com p elementos disponíveis entre n elementos disponíveis no problema. Esses agrupamentos se diferenciam uns dos outros pela ordem em que os seus elementos aparecem ("a ordem importa"). Chamamos de arranjo simples de n elementos tomados p a p, em que n ≥ p e representamos por $A_{n;p}$ ou A_n^p.

A fórmula utilizada é $A_{n;p} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Exemplo: Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1; 2; 3; 4; 5 e 6?

$$A_{6;4} = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2!}{2!} = 6\cdot5\cdot4\cdot3 = 360$$

Observação importante: A **permutação** é um caso específico do **arranjo**, em que só importa a ordem dos objetos e $n = p$.

Combinação simples

$$C_{n;p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}.$$

Combinação simples é qualquer agrupamento que se pode formar com p elementos disponíveis entre n elementos disponíveis no problema. Esses agrupamentos não se diferenciam uns dos outros pela ordem em que seus elementos aparecem (“a ordem não importa”). Chamamos de combinação simples de n elementos tomados p a p, em que n > p e representamos por $C_{n;p}$ ou C_n^p. A fórmula utilizada é $C_{n;p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$.

Exemplo: Em uma turma de 10 estudantes, quantos quartetos (4 pessoas) podemos formar?

$$\boldsymbol{C_{10;4} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 7}{3 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 7}{1}} = \textbf{210 quartetos}$$

Atividades

1. Calcule o valor de cada expressão a seguir:

$a)\quad 3! =$

b) $7! =$

c) $\frac{6!}{4!} =$

d) $\frac{8!}{2!6!} =$

2. Uma prova foi elaborada com 10 questões do tipo V ou F. Justifique de quantas maneiras distintas ela pode ser respondida.

Disponível em: br.depositphotos.com. Acesso em: 19 abr. 2023

3. (Enem digital - 2020) Um modelo de telefone celular oferece a opção de desbloquear a tela usando um padrão de toques como senha.

Os toques podem ser feitos livremente nas 4 regiões numeradas da tela, sendo que o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo.

Qual expressão representa o número total de códigos existentes?

(A) $4^5 - 4^4 - 4^3$

(B) $4^5 + 4^4 + 4^3$

(C) $4^5 \times 4^4 \times 4^3$

(D) $(4!)^5$

(E) 4^5

4. (Enem 2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.
Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há:

(A) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
(B) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
(C) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
(D) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
(E) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

5. Um anagrama é uma nova palavra ou lista obtida por meio dos elementos de outra palavra. Todos os anagramas da palavra “LUA”, por exemplo, são: LUA, LAU, ALU, AUL, ULA e UAL. Sendo assim, calcule:

a) Quantos anagramas pode-se obter a partir da palavra “REVISA”?

b) Quantos anagramas pode-se obter a partir da palavra “MARATONA”?

6. (Enem digital 2020) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @.

O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras “edu” apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.

Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

(A) 59

(B) 60

(C) 118

(D) 119

(E) 120

7. Em uma competição de xadrez, participam 10 jogadores. A premiação é feita aos três primeiros colocados. De quantas maneiras a premiação pode ocorrer?

Disponível em: www.canstockphoto.com.br. Acesso em: 20 abr. 2023.

8. Em um jogo de cartas, Alex precisa escolher 9 dentre 13 cartas diferentes. De quantas maneiras diferentes essas cartas podem ser escolhidas?

Elaboração: NUREDI 2023.

9. Quantos números naturais pares de 3 algarismos distintos existem?

10. Fernanda decidiu listar os 6 documentários que ela deseja assistir no próximo fim de semana, sendo que ela assistirá 2 por dia, de sexta a domingo. Eles podem ser vistos em ordem aleatória, exceto o documentário sobre História de Goiás, que tem os episódios 1 e 2 e que ela assistirá a ambos no mesmo dia, nessa ordem. Qual é o número de maneiras distintas que Fernanda poderá assistir esses documentários de forma que ela assista, obrigatoriamente, aos documentários sobre História de Goiás no mesmo dia?

Elaboração: NUREDI 2023.

SEDUC
Secretaria de Estado
da Educação

GOVERNO DE GOIÁS
O ESTADO QUE DÁ CERTO

Núcleo de Recursos Didáticos
NUREDI

Contato: (62) 3243 6756 – Sala 80

nuredi@seduc.go.gov.br

@nuredi_seduc