MARATONA REVISA

3ª série

MATEMÁTICA

Caderno do Estudante

Revisa Goiás

SEDUC
Secretaria de Estado
da Educação

GOVERNO DE GOIÁS
O ESTADO QUE DÁ CERTO

Agosto - 2023

MARATONA REVISA
MATEMÁTICA - 3ª SÉRIE - AGOSTO

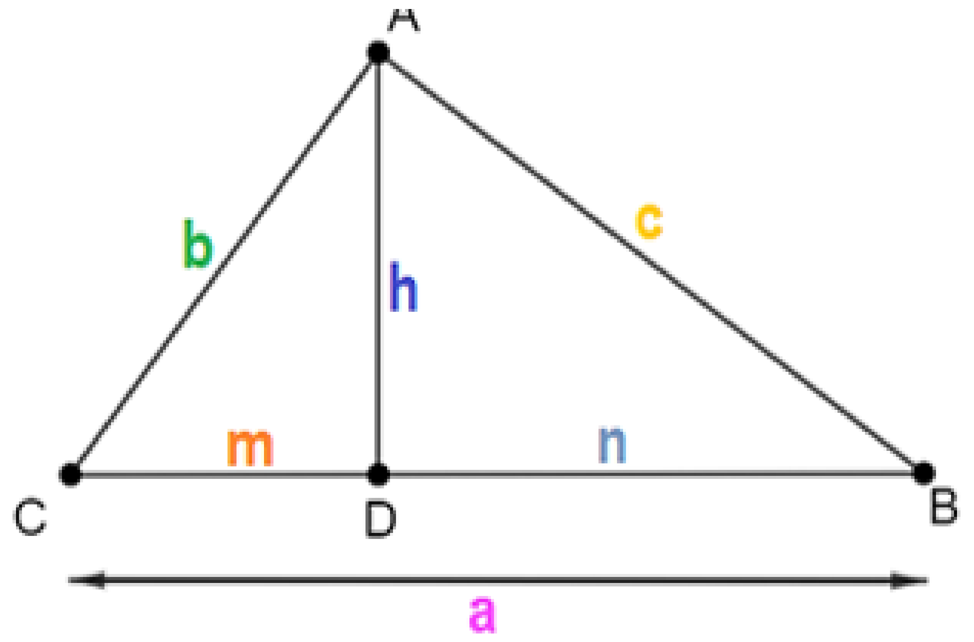
Semana 1

Triângulo retângulo

Relembrando

Triângulo retângulo

Um triângulo é retângulo se possuir um ângulo reto, ou seja, um ângulo de 90°. Em um triângulo retângulo, o maior lado, que é oposto ao ângulo reto, é denominado **hipotenusa.** Os outros dois lados, que formam o ângulo reto, são denominados **catetos.** Entre elementos de um triângulo retângulo ainda se destacam a **altura relativa à hipotenusa** e às **projeções dos catetos sobre a hipotenusa**. Dado o triângulo ABC a seguir, destacam-se esses elementos:



a: hipotenusa

b: cateto

c: cateto

h: altura relativa à hipotenusa

m: projeção do cateto b sobre a hipotenusa

n: projeção do cateto c sobre a hipotenusa

Pela semelhança de triângulos, determinam-se algumas importantes relações entre as medidas dos lados do triângulo, relações estas conhecidas como relações métricas no triângulo retângulo. São elas:

$a \cdot h = b \cdot c$ $\quad h^2 = m \cdot n$ $\quad b^2 = a \cdot m$ $\quad c^2 = a \cdot n$

Teorema de Pitágoras

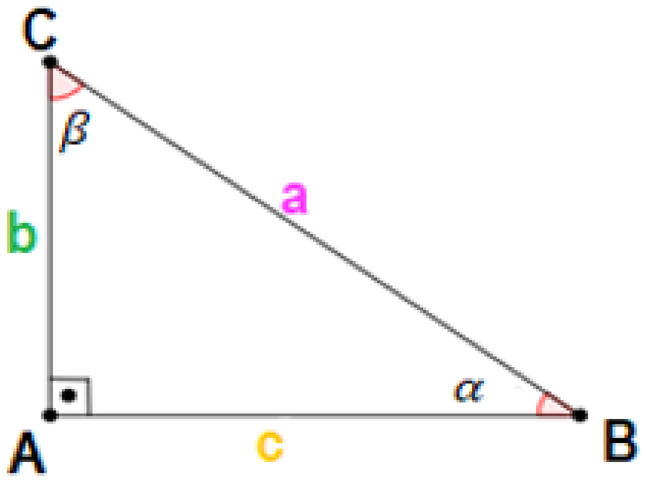
$a^2 = b^2 + c^2$

$a = m + n$

Trigonometria no triângulo retângulo

Além das relações métricas (relações entre as medidas dos lados) no triângulo retângulo, existem relações entre as medidas dos ângulos e dos lados de um triângulo.

Sabe-se que, em um triângulo retângulo, o maior lado (oposto ao ângulo de 90°) é chamado de **hipotenusa**, e os outros lados (que formam o ângulo de 90°), de **catetos**. Porém, usando um dos ângulos agudos do triângulo como referência, podem-se denominar esses catetos como **cateto oposto** e **cateto adjacente**. Veja:



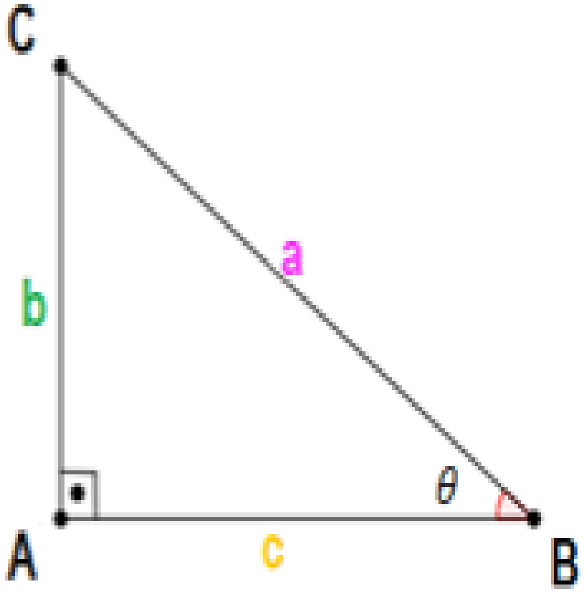
• Em relação ao ângulo α:
O lado $\overline{AC}$, de medida b, é denominado **cateto oposto**.
O lado $\overline{AB}$, de medida c, é denominado **cateto adjacente**.

• Em relação ao ângulo β:
O lado $\overline{AB}$, de medida c, é denominado **cateto oposto**.
O lado $\overline{AC}$, de medida b, é denominado **cateto adjacente**.

Revisa Goiás SEDUC Secretaria de Estado da Educação GOVERNO DE GOIÁS O ESTADO QUE DÁ CERTO

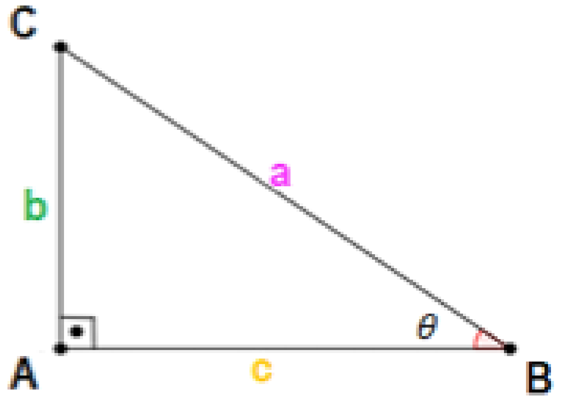
✓ Razões trigonométricas em um triângulo retângulo

Seno de um ângulo agudo: em um triângulo retângulo, denomina-se seno de um ângulo agudo θ, indicado por sen (θ), a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa do triângulo retângulo.



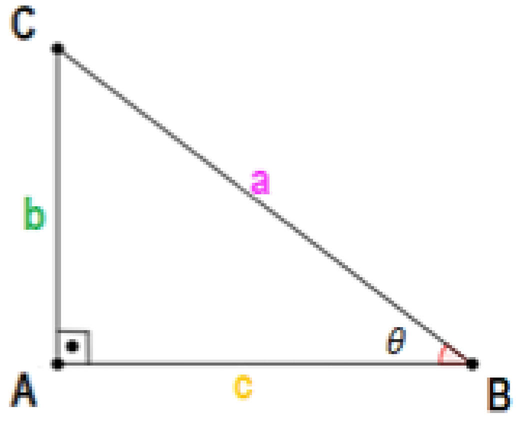
$$sen(\theta) = \frac{cateto\ oposto\ a\ \theta}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

Cosseno de um ângulo agudo: em um triângulo retângulo, denomina-se cosseno de um ângulo agudo θ, indicado por cos (θ), a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa do triângulo retângulo.



$$\boxed{cos(\theta) = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \theta}{hipotenusa} = \frac{c}{a}}$$

Tangente de um ângulo agudo: em um triângulo retângulo, denomina-se tangente de um ângulo agudo θ, indicada por tg (θ), a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.



$$tg(\theta) = \frac{cateto\ oposto\ a\ \theta}{cateto\ adjacente\ a\ \theta} = \frac{b}{c}$$

Seno, cosseno e tangente de alguns ângulos notáveis:

Alguns ângulos aparecem com maior frequência, sendo assim chamados de ângulos notáveis. Para esses ângulos, os valores das razões trigonométricas relacionadas a eles merecem destaque:

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

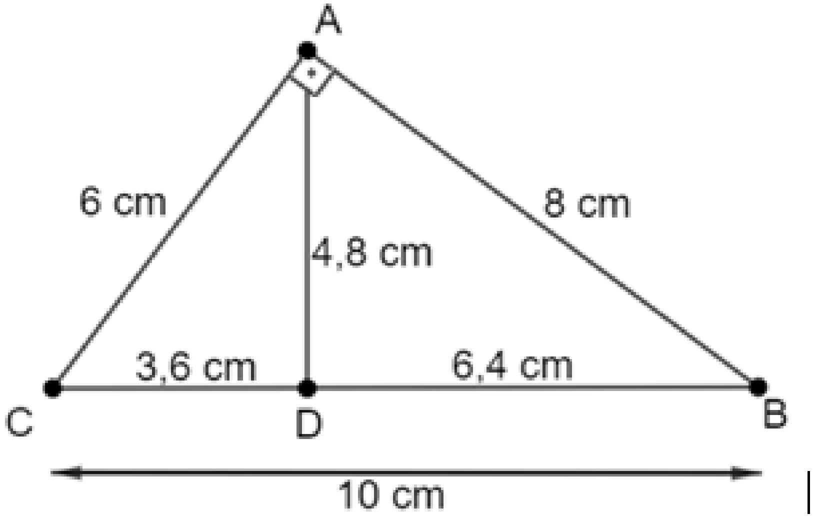
Relações entre as razões trigonométricas

Das razões trigonométricas já conhecidas e do teorema de Pitágoras, podem-se estabelecer as seguintes relações que serão úteis em algumas situações:

$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$	$tg(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}$

ATIVIDADE

1. Considere o triângulo ABC a seguir:



Identifique as medidas de cada um dos seguintes elementos desse triângulo retângulo:

a) Hipotenusa:

b) Cateto maior:

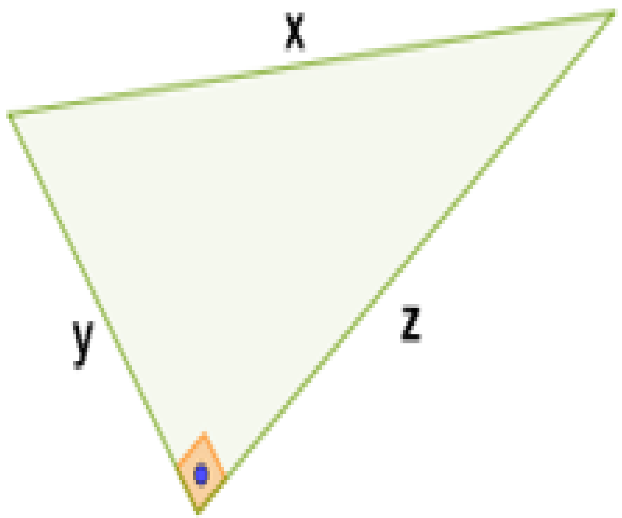
c) Cateto menor:

d) Altura relativa à hipotenusa:

e) Projeção do cateto maior:

f) Projeção do cateto menor:

2. Considere o triângulo retângulo a seguir.



Nas sentenças a seguir, assinale com um x aquela que corresponde ao teorema de Pitágoras aplicado a esse triângulo.

( ) $x^2 = y^2 - z^2$

( ) $y^2 = x^2 + z^2$

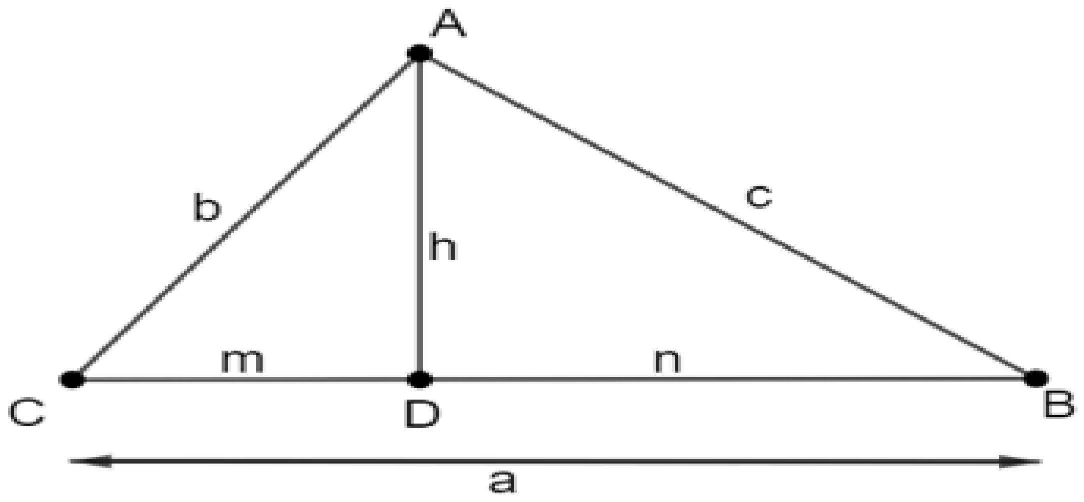
( ) $x^2 = y^2 + z^2$

( ) $x^2 = y^2 \cdot z^2$

( ) $z^2 = y^2 + x^2$

).

3. Considere o triângulo a seguir:



Considerando as medidas dos lados desse triângulo, classifique em (V) para verdadeira ou (F) para falso cada sentença a seguir:

a) (   ) $h^2 = m + n$
b) (   ) $b^2 = a \cdot m$
c) (   ) $a + h = b + c$
d) (   ) $a = m + n$
e) (   ) $h^2 = m \cdot n$
f) (   ) $c^2 = a \cdot n$
g) (   ) $a \cdot h = b \cdot c$
h) (   ) $b^2 = a \cdot c$
i) (   ) $a^2 = b^2 + c^2$

4. Em um triângulo retângulo isósceles, um dos catetos mede 8 cm. Qual é a medida da hipotenusa?

(A) 16 cm

(B) 32 cm

(C) $4\sqrt{2}$ cm

(D) $8\sqrt{2}$ cm

(E) 32 cm

5. (Enem 2014) Diariamente, uma residência consome $20\ 160\ Wh$. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões $6\ cm\ x\ 8\ cm$. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, $24\ Wh$ por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome. Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

(A) Retirar 16 células.

(B) Retirar 40 células.

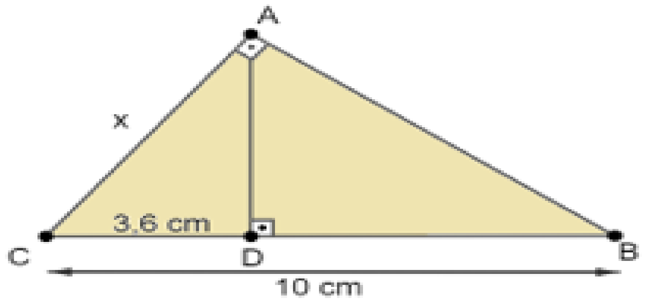
(C) Acrescentar 5 células.

(D) Acrescentar 20 células.

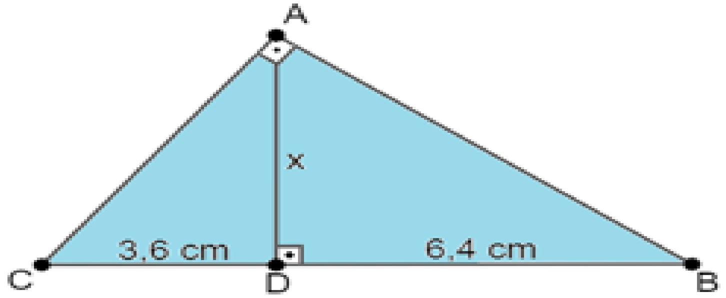
(E) Acrescentar 40 células.

6. Calcule o valor de x usando as relações métricas do triângulo retângulo:

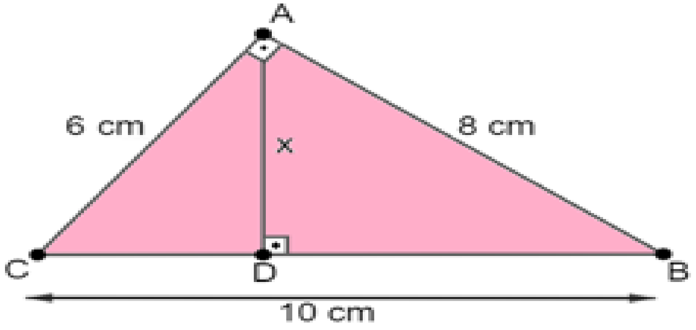
a)



b)

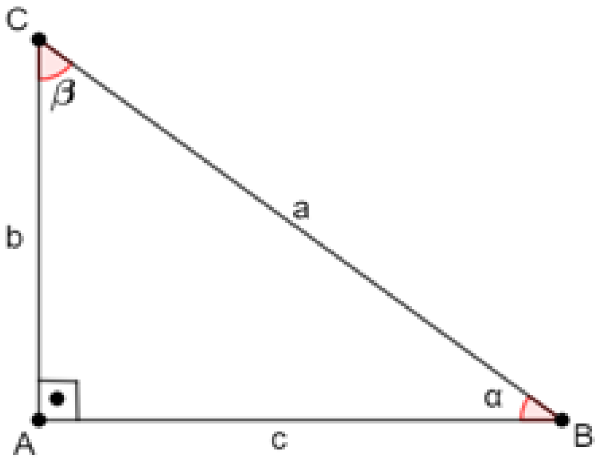


c)



7. Qual é a área de um triângulo retângulo, cujas projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa medem 3 cm e 12 cm?

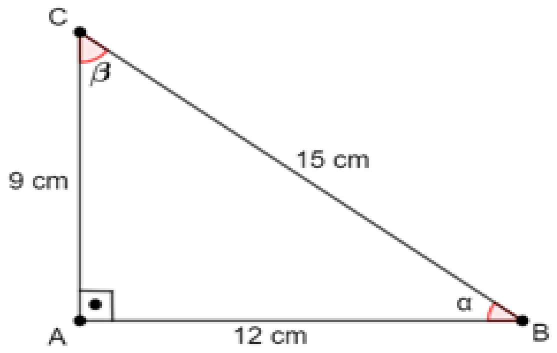
8. Considere o triângulo retângulo a seguir.



Relacione a coluna da esquerda com a coluna da direita:

(A) $sen(\alpha)$	( ) $\frac{c}{b}$
(B) $cos(\alpha)$	( ) $\frac{b}{a}$
(C) $tg(\alpha)$	( ) $\frac{c}{a}$
(D) $tg(\beta)$	( ) $\frac{b}{c}$

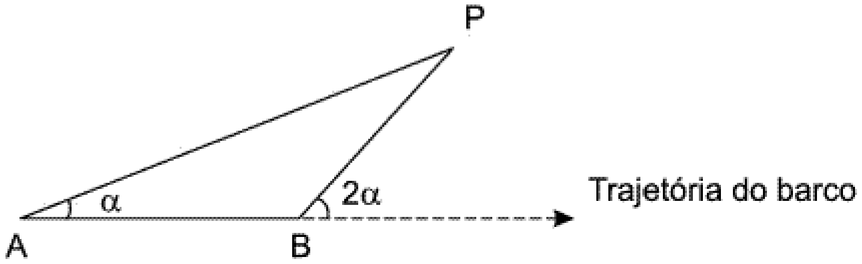
9. Considere o triângulo retângulo a seguir e calcule as razões trigonométricas solicitadas.



a) $sen(\alpha) =$	**b)** $cos(\alpha) =$
c) $tg(\alpha) =$	**d)** $sen(\beta) =$
e) $cos(\beta) =$	**f)** $tg(\beta) =$

10. Sabendo que, em um triângulo retângulo, x é um ângulo agudo e que $cos\ (x) = \frac{4}{5}$, calcule $sen\ (x)$ e $tg\ (x)$.

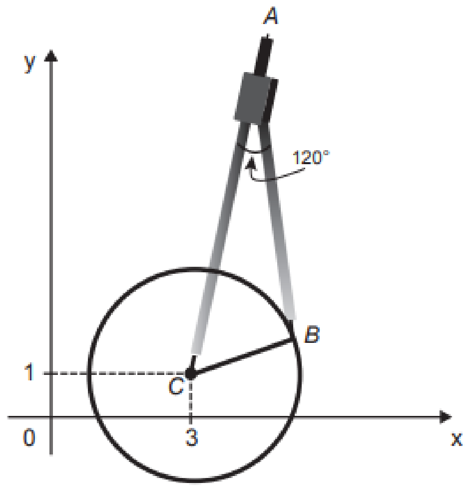
11. (ENEM 2011) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo α= 30° e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

(A) 1 000 m.
(B) 1 000√3 m.
(C) 2 000 √3/3 m.
(D) 2 000 m.
(E) 2 000√3 m.

12. (Enem 2017) Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.



Após concluir o desenho, ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo com os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será

A I.

B II.

C III.

D IV.

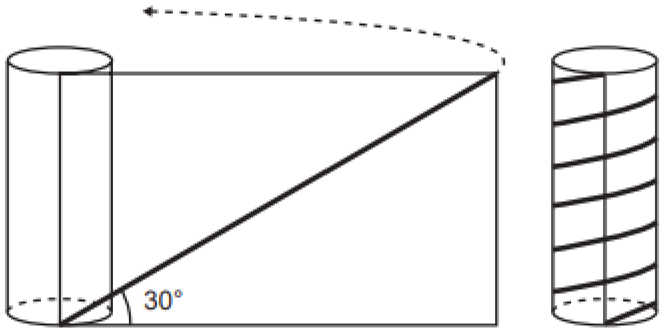
E V.

13. (ENEM 2013) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa Avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

(A) menor que 100 m².
(B) entre 100 m² e 300 m².
(C) entre 300 m² e 500 m².
(D) entre 500 m² e 700 m².
(E) maior que 700 m².

14. (ENEM 2018) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $\frac{6}{\pi}$ cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.



O valor da medida da altura do cilindro, em centímetro, é

(A) $36\sqrt{3}$.

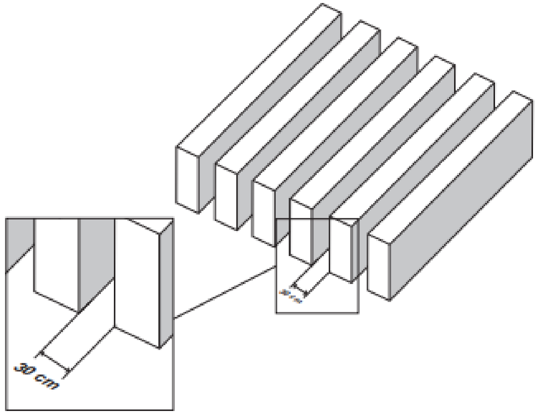
(B) $24\sqrt{3}$.

(C) $4\sqrt{3}$.

(D) 36.

(E) 72.

15. (Enem 2020) Pergolado é o nome que se dá a um tipo de cobertura projetada por arquitetos, comumente em praças e jardins, para criar um ambiente para pessoas ou plantas, no qual há uma quebra da quantidade de luz, dependendo da posição do sol. É feito como um estrado de vigas iguais, postas paralelas e perfeitamente em fila, como ilustra a figura.



Um arquiteto projeta um pergolado com vãos de 30 cm de distância entre suas vigas, de modo que, no solstício de verão, a trajetória do sol durante o dia seja realizada num plano perpendicular à direção das vigas, e que o sol da tarde, no momento em que seus raios fizerem 30° com a posição a pino, gere a metade da luz que passa no pergolado ao meio-dia. Para atender à proposta do projeto elaborado pelo arquiteto, as vigas do pergolado devem ser construídas de maneira que a altura, em centímetro, seja a mais próxima possível de

(A) 9.
(B) 15.
(C) 26.
(D) 52.
(E) 60

16. (Enem PPL 2020) Projetado pelo arquiteto Oscar Niemeyer, o Museu de Arte Contemporânea (MAC) tornou-se um dos cartões-postais da cidade de Niterói (Figura 1).

Figura 1

Considere que a forma da cúpula do MAC seja a de um tronco de cone circular reto (Figura 2), cujo diâmetro da base maior mede 50 m e 12 m é a distância entre as duas bases. A administração do museu deseja fazer uma reforma revitalizando o piso de seu pátio e, para isso, precisa estimar a sua área. (Utilize 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$ e 3 para π).

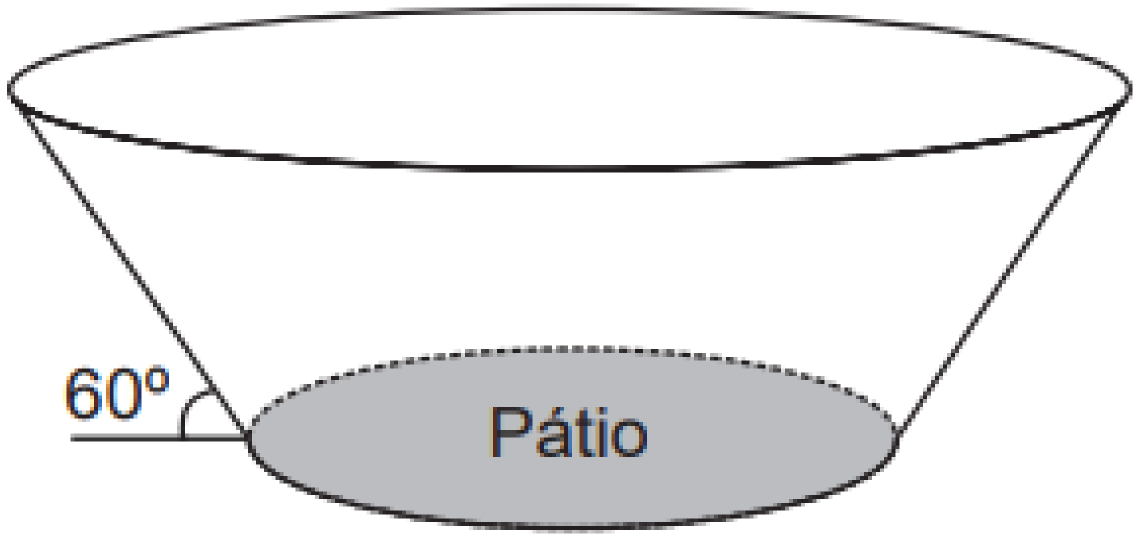


Figura 2

A medida da área do pátio do museu a ser revitalizada, em metro quadrado, está no intervalo

(A) [100, 200].
(B) [300, 400].
(C) [600, 700].
(D) [900, 1 000].
(E) [1 000, 1 100].

Semana 2

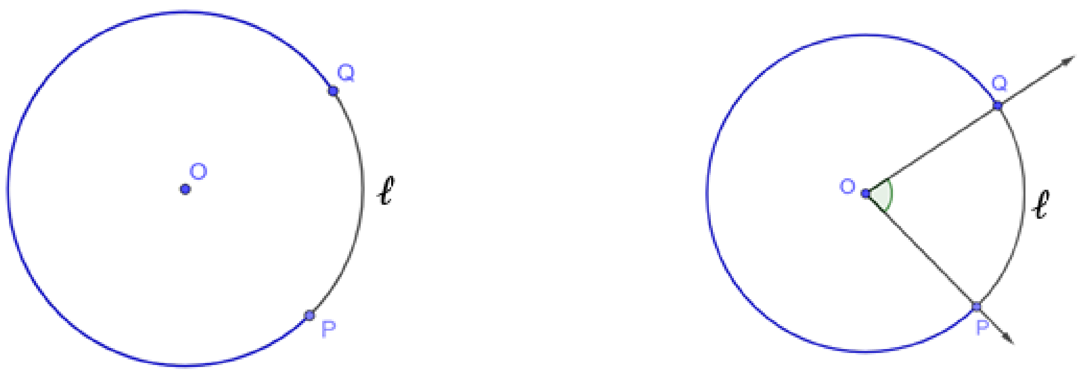
Relembrando

Funções trigonométricas

Arcos e ângulos

Arco geométrico é uma das partes de uma circunferência delimitada por dois pontos, incluindo esses pontos. Se esses dois pontos são coincidentes, tem-se um arco nulo ou arco de uma volta. Todo arco de circunferência tem um ângulo central que o subtende.

Arco $\widehat{PQ}$: Arco $\widehat{PQ}$ e ângulo central $P\hat{O}Q$:



Comprimento do arco e medida do arco:

A **medida de um arco** é a medida do ângulo central que o subtende, seja qual for a medida do raio da circunferência que o contém. As unidades geralmente utilizadas para medir os arcos são o grau (°) e o radiano (rad).

Grau (°): um arco de 1° equivale a $\frac{1}{360}$ de uma circunferência.

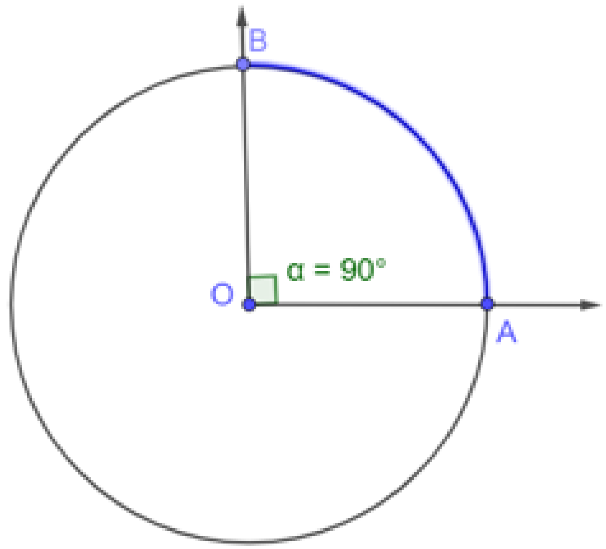
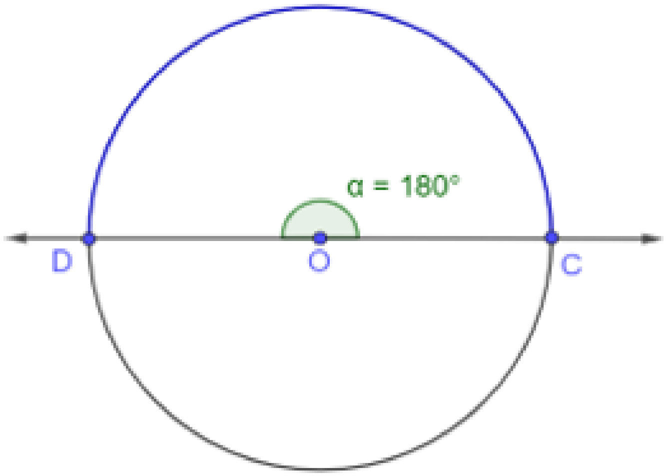
Radiano (rad): um arco de um radiano é um arco cujo comprimento retificado é igual ao raio da circunferência.

O **comprimento do arco** é a medida linear do arco, sendo utilizadas as medidas de comprimento: metros, centímetro, milímetro etc. Como o comprimento da circunferência é calculado pela fórmula $C = 2 \cdot \pi \cdot r$, pode-se calcular o comprimento do arco (ℓ) utilizando a seguinte relação:

$\ell = \frac{\alpha}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$, onde α é a medida em graus do arco.

Relação entre unidades para medir arcos

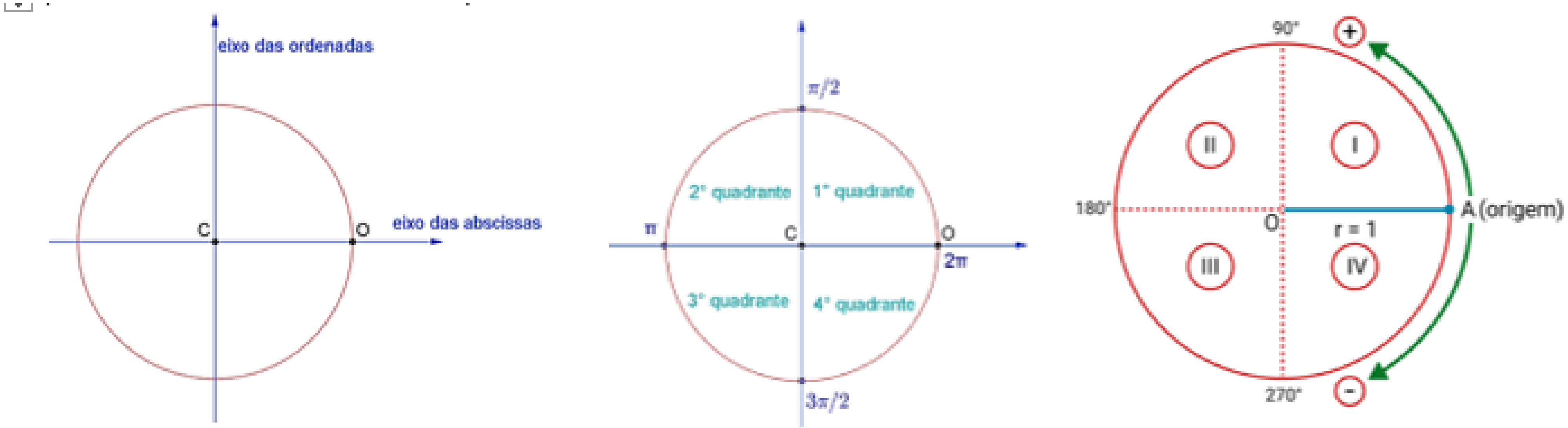
Se cada arco de comprimento $\ell = r$ tem medida de 1 rad, então o arco correspondente a uma circunferência cujo comprimento é $2 \cdot \pi \cdot r$ tem medida 2π radianos. Exemplos:

$\widehat{AB}$: arco de 90° ou $\frac{\pi}{2}$ rad	$\widehat{CD}$: arco de 180° ou π rad
	

Observação: Considerando que um arco de 180° mede π radianos, pode-se fazer essa conversão usando uma regra de três simples.

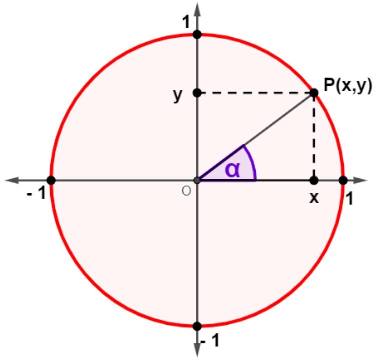
Círculo Trigonométrico (Ciclo trigonométrico)

É uma circunferência sobre um plano cartesiano, cujo raio é unitário. Possui um ponto considerado como origem (O) e o sentido considerado como positivo é o sentido anti-horário.



Disponível em: https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/23216/mod_resource/content/1/Trigonometria_no_ciclo.pdf. Acesso em: 20 jun. 2023.

Dado um ponto (x, y) no círculo trigonométrico, existe um único ângulo central que define as funções seno e cosseno do seguinte modo. **Observe:**

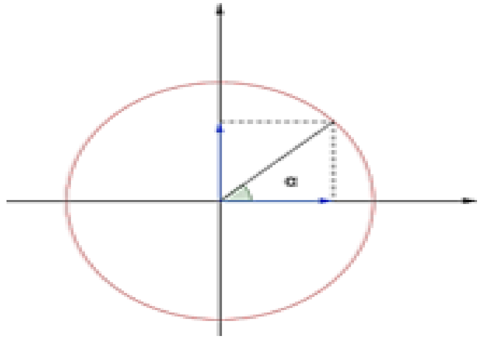
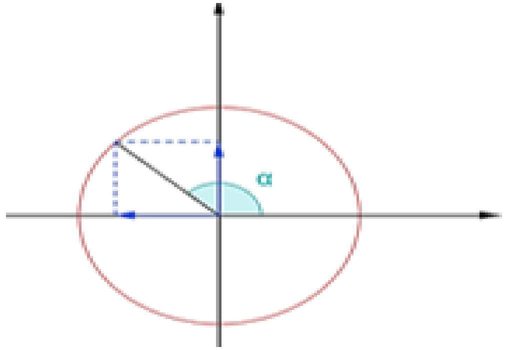
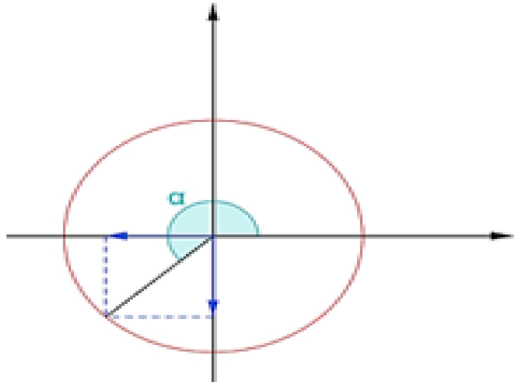
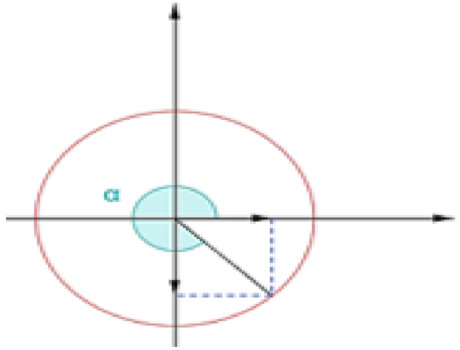


Observe que:

O $sen(\alpha)$ é a ordenada de $P(x, y)$, ou seja, $sen(\alpha) = y$.

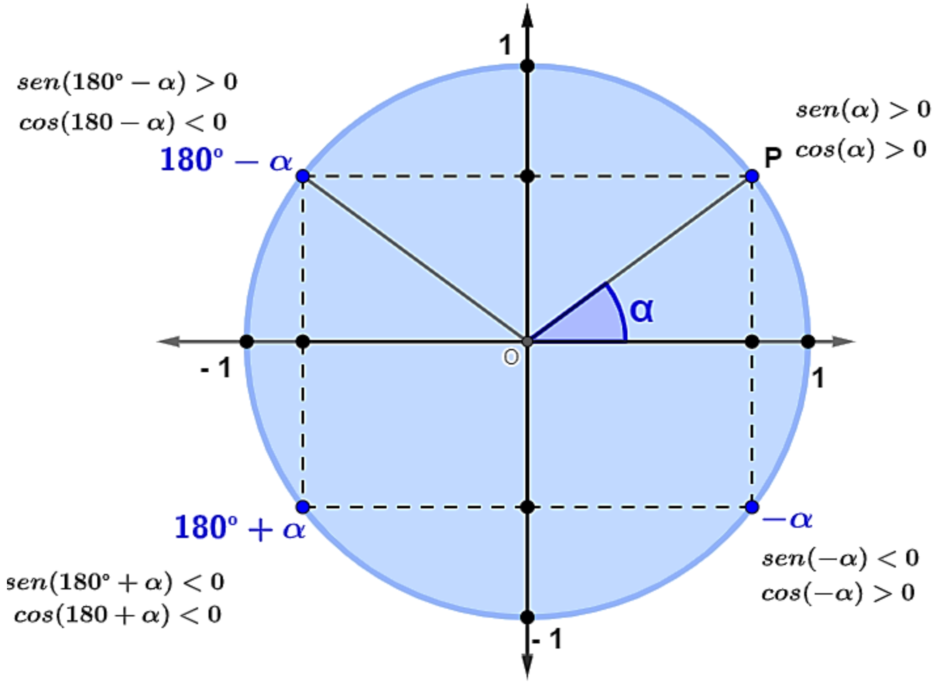
✓ O $cos(\alpha)$ é a abscissa de $P(x, y)$, ou seja, $cos(\alpha) = x$.

Dessa forma, define-se:

Se o ângulo estiver no 1º quadrante, tanto o seu seno como o cosseno serão positivos: 	Se o ângulo estiver no 2º quadrante, o seu seno continuará positivo, mas o cosseno será negativo: 
Se o ângulo estiver no 3º quadrante, tanto o seu seno como o cosseno serão negativos: 	Se o ângulo estiver no 4º quadrante, o seu seno será negativo, mas o cosseno será positivo: 

Ângulo	0^o ou (0 rad)	90^o ou $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ rad	180^o ou (π rad)	270^o ou $\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ rad	360^o ou (2π rad)
Seno	0	1	0	-1	0
Cosseno	1	0	-1	0	1

Ao analisar os quadrantes, tem-se que, se α está no 1º quadrante, então o ângulo $\pi - \alpha$ está no 2º quadrante, o ângulo $\pi + \alpha$ estará no 3º quadrante e o ângulo $2\pi - \alpha$ ou $-\alpha$ estará no 4º quadrante. Observe:

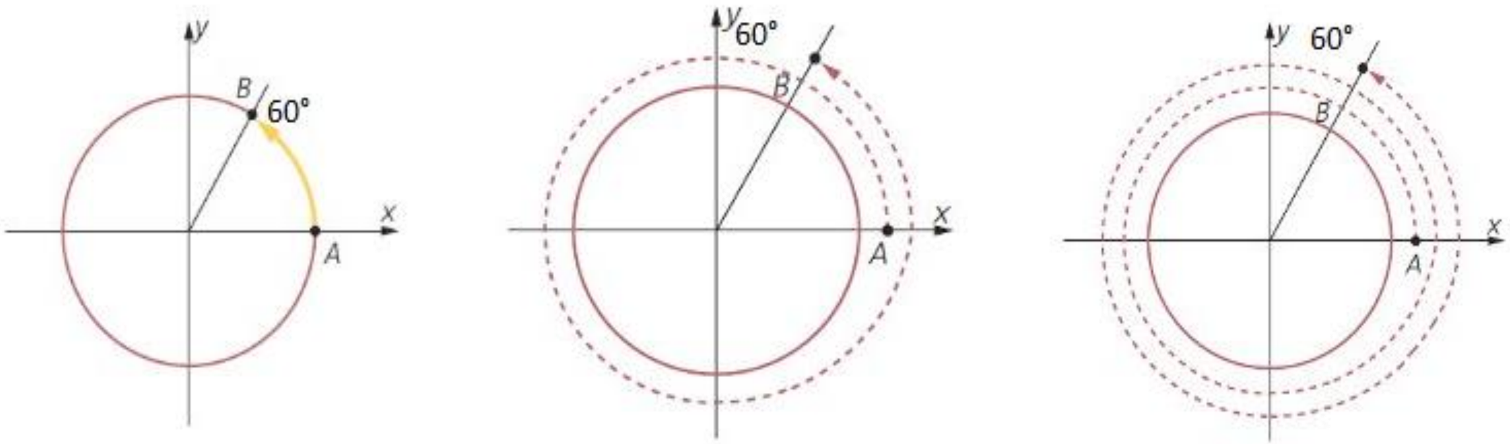


Pode-se perceber ainda vários valores de seno e cosseno nos outros quadrantes podem se relacionar com valores do 1º Quadrante que já estão tabelados. Observe que é possível fazer as seguintes relações:

$sen(180-\alpha) = sen\,\alpha$ $cos(180-\alpha) = -cos\,\alpha$	$sen(180+\alpha) = -sen\,\alpha$ $cos(180+\alpha) = -cos\,\alpha$	$sen(-\alpha) = -sen\,\alpha$ $cos(-\alpha) = cos\,\alpha$

Arcos côngruos (ou congruentes)

Dois arcos são côngruos se eles tiverem as mesmas extremidades. No contexto do ciclo trigonométrico, são aqueles que possuem a mesma origem no ponto A e o final no ponto B, como indicado na figura a seguir.



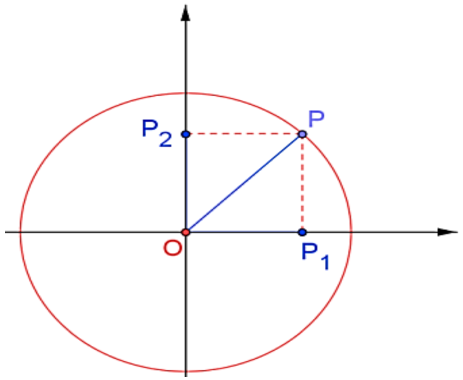
Do ponto de vista prático, os arcos côngruos possuem os mesmos valores numéricos para as suas razões trigonométricas.

Por exemplo

- ✓ $sen\,(60°) = sen\,(420°) = sen\,(780°) = \cdots = sen\,(60° + k \cdot 360°)$, com $k \in \mathbb{Z}$
- ✓ $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{7\pi}{3}\right) = sen\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \cdots = sen\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$

Funções trigonométricas: Função Seno e Função Cosseno

Seja x um número real que representa a medida de um ângulo central no ciclo trigonométrico medido a partir da origem, e que assim determinará um único ponto.



Utilizando a letra x para a variável independente que representa o ângulo, e y, ou $f(x)$, para as funções, define-se as funções seno e cosseno de um ângulo como funções reais de variáveis reais que associam, a cada número real $\boldsymbol{x}$, o valor real $sen\ (x)$ ou de $cos\ (x)$. Assim, o eixo das abscissas pode ser chamado de eixo dos cossenos e o eixo das ordenadas de eixo dos senos.

Observações:

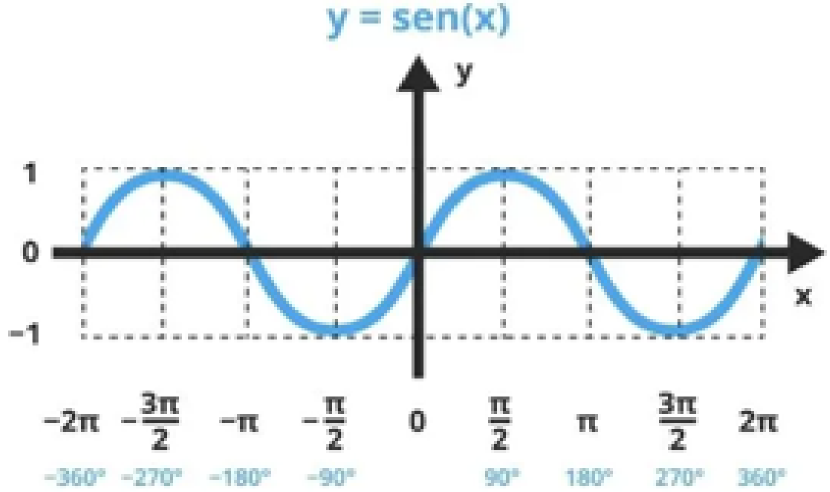
1º) Ambas são funções $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas $f(x) = sen\ (x)$ ou $f(x) = cos\ (x)$.

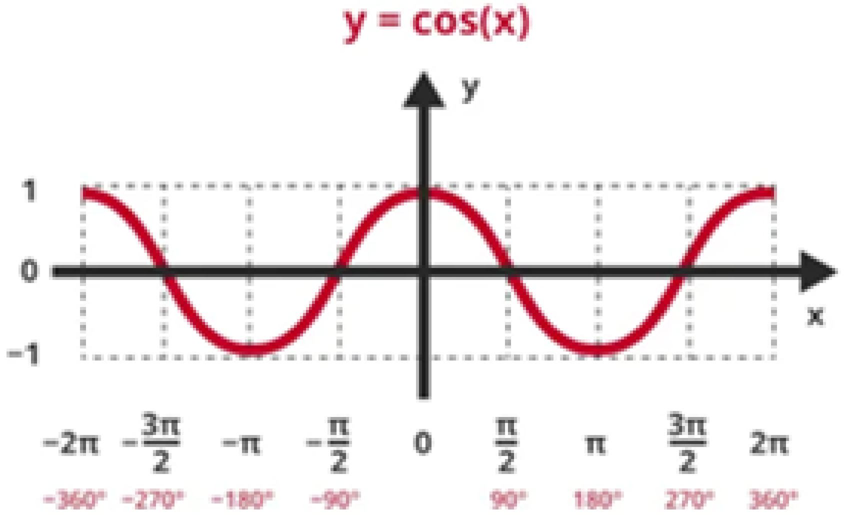
2º) Possuem $\text{D} = \mathbb{R}$ e $\text{Im} = [-1, 1]$.

3º) São funções periódicas de período 2π.

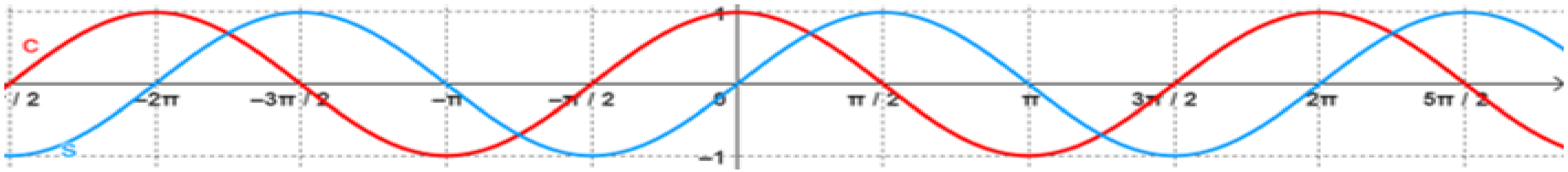
Para a construção das representações gráficas dessas funções, é necessária uma tabela com as razões trigonométricas dos principais ângulos (em graus ou radianos). Observe:

x (graus)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
x (radianos)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1





Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm. Acesso em: 20 jun. 2023.



Funções trigonométricas: Função Tangente

x (graus)	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
x (radianos)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Diferente das duas funções trigonométricas anteriores, a função tangente não possui valor de máximo nem valor de mínimo. A lei de formação da função tangente é $\boldsymbol{f(x) = tg(x)}$.

A função tangente possui restrições para o seu domínio, como $\boldsymbol{tg(x) = \frac{sen}{cos}}$, então não existem valores para tangente quando $cos(x) = 0$.

Como $cos(90°) = 0$ e $cos(270°) = 0$, a função tangente não está definida para esses ângulos. Desta forma, quando há ângulos maiores que uma volta completa, todos aqueles em que o valor de cosseno é 0 não fazem parte do domínio da função tangente. Assim:

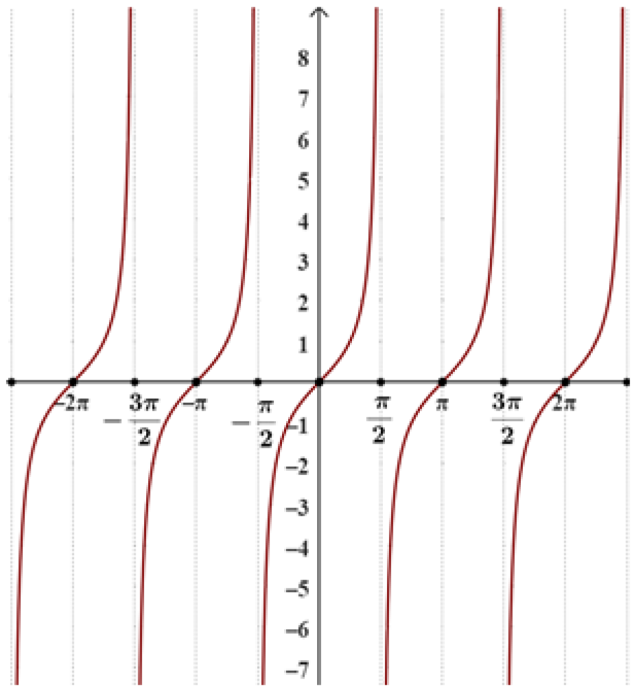
$$\mathrm{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \neq \frac{\pi}{2} + kx, k \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad \mathrm{Im} = \mathbb{R}$$

Analisando o gráfico $y = tan(x)$, percebe-se que o período da função tangente é π.

Ou seja

$$tg(x) = tg(x + kx), \text{com } k \in \mathbb{Z} \text{ e } x \in \mathrm{D}(f)$$

y = tg(x)



Senoides e cossenoides

Além das funções trigonométricas mostradas anteriormente, merecem atenção outras funções que também envolvem seno e cosseno e que de modo geral são escritas nas formas:

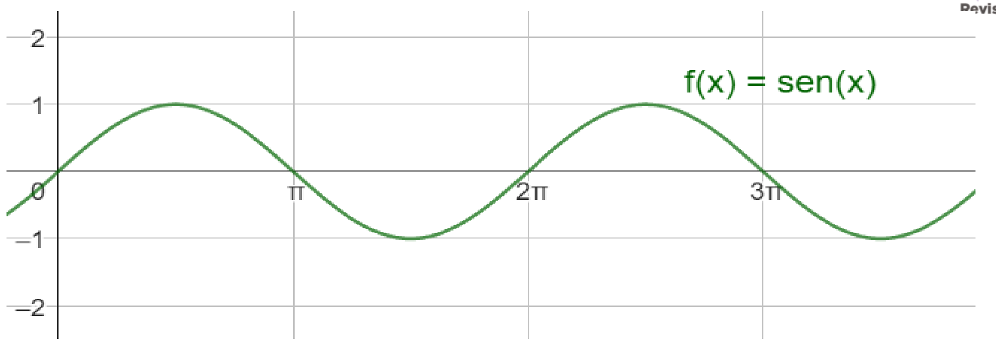
$\boldsymbol{f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)}$	$\boldsymbol{f(x) = a + b \cdot cos(cx + d)}$

em que $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$ são constantes e $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ diferentes de zero. Exemplos:

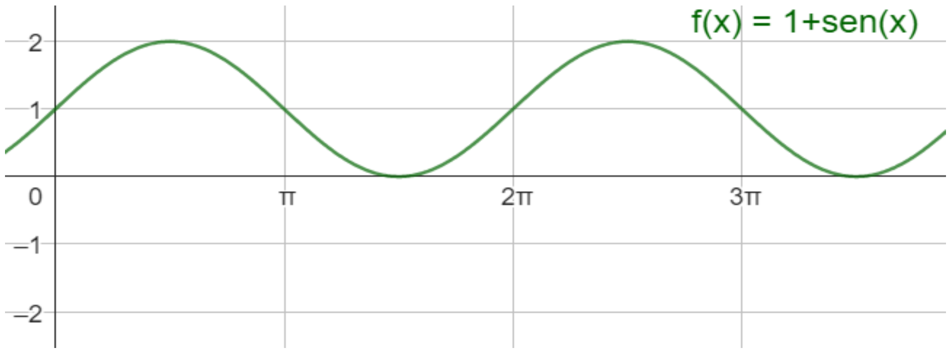
$f(x) = 2 \cdot sen(x)$	$a = 0, b = 2, c = 1\ e\ d = 0.$
$f(x) = 1 + 2 \cdot cos(x)$	$a = 1, b = 2, c = 1\ e\ d = 0$
$f(x) = 1 + 2 \cdot sen(2x - \pi)$	$a = 1, b = 2, c = 2\ e\ d = -\pi$
$f(x) = 2 + 3 \cdot cos(3x + \frac{\pi}{2})$	$a = 2, b = 3, c = 3\ e\ d = \frac{\pi}{2}$

Qual o papel das constantes a, b, c e d?

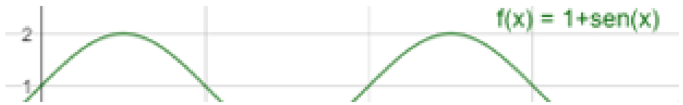
Considere o gráfico da função $f(x) = sen(x)$ mostrado anteriormente.



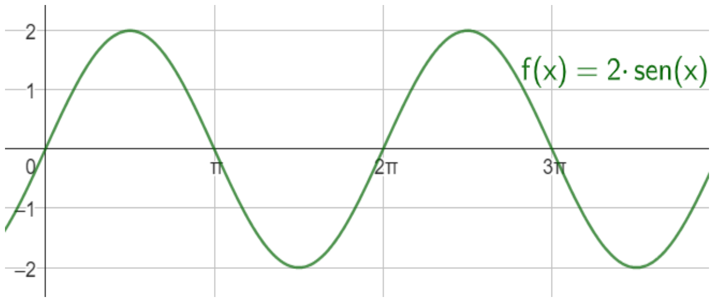
Considere agora o gráfico da função $f(x) = 1 + sen(x)$ com a constante $a = 1$



Comparando o gráfico da função $f(x) = 1 + sen(x)$ com o gráfico da função $f(x) = sen(x)$, verifica-se que ele

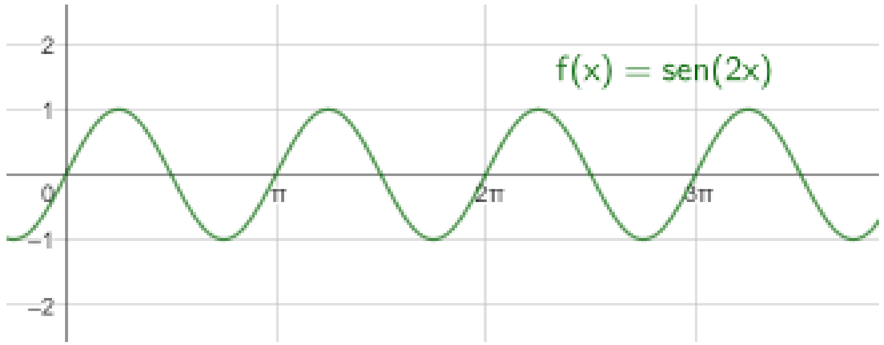


Considere agora o gráfico da função $f(x) = 2 \cdot sen(x)$ com a constante $b = 2$



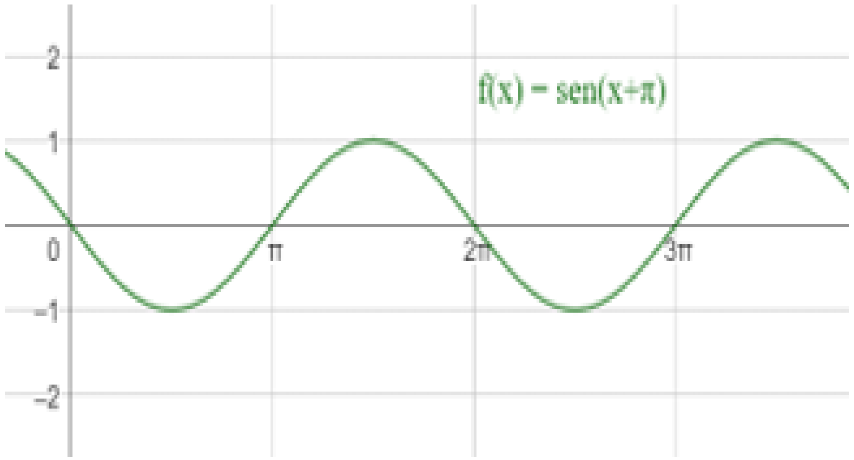
Comparando o gráfico da função $f(x) = 2 \cdot sen(x)$ com o gráfico da função $f(x) = sen(x)$, verifica-se que ele sofreu uma **dilatação vertical (esticou)** duas vezes.

Considere agora o gráfico da função $f(x) = sen(2x)$ com a constante $c = 2$



Comparando o gráfico da função $f(x) = sen(2x)$ com o gráfico da função $f(x) = sen(x)$, verifica-se que ele sofreu uma **compressão horizontal (encolheu)** de modo que seu período foi dividido por 2.

Considere agora o gráfico da função $f(x) = sen(x + \pi)$ com a constante $d = \pi$



Comparando o gráfico da função $f(x) = sen(x + \pi)$ com o gráfico da função $f(x) = sen(x)$, verifica-se que ele sofreu um **deslocamento horizontal (translação)** para a esquerda de π unidades.

Generalizando:

A constante **a** translada o gráfico padrão em **a** unidades **verticais**. Se $a > 0$ o gráfico "sobe" **a** unidades. Se $a < 0$ o gráfico "desce" **a** unidades.
A constante **b** comprime ou dilata o gráfico **verticalmente**. Se $\|b\| > 1$ o gráfico dilata **verticalmente**. Se $0 < \|b\| < 1$ o gráfico comprime **verticalmente**. O valor de **b** é chamado de **amplitude** do gráfico.
A constante **c** altera o período do gráfico, ou seja, comprime ou dilata o gráfico **horizontalmente**. Se $\|c\| > 1$, o gráfico será comprimido **horizontalmente** em $\|c\|$ unidades. Se $0 < \|c\| < 1$ o gráfico dilata **horizontalmente** em $\|c\|$ unidades. O **período** passa a ser $\frac{2\pi}{\|c\|}$.
A constante **d** translada o gráfico padrão em $\left\|\frac{d}{c}\right\|$ unidades **horizontais**. Se $d > 0$, o gráfico translada $\left\|\frac{d}{c}\right\|$ unidades para a **esquerda**. Se $d < 0$, o gráfico translada $\left\|\frac{d}{c}\right\|$ unidades para a **direita**.

ATIVIDADES

1. Qual é a medida em graus do arco, cujo ângulo central que o subtende mede o correspondente a três quartos de uma volta?

2. Qual é o comprimento de um arco correspondente a um ângulo central de 45° contido em uma circunferência de raio 4 cm? Considere $\pi = 3{,}1$.

3. Expresse as seguintes medidas em radianos:

a) 120°

b) 300°

4. Expresse as seguintes medidas em graus:

a) $\frac{\pi}{6}\ rad$

b) $\frac{5\pi}{4}\ rad$

5. Determine em qual quadrante se encontra o arco $\boldsymbol{\theta}$ em cada caso:

a) $sen(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

b) $cos(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$

c) $tg(\boldsymbol{\theta}) = -1$

6. Determine o valor de cada razão trigonométrica utilizando arcos congruentes:

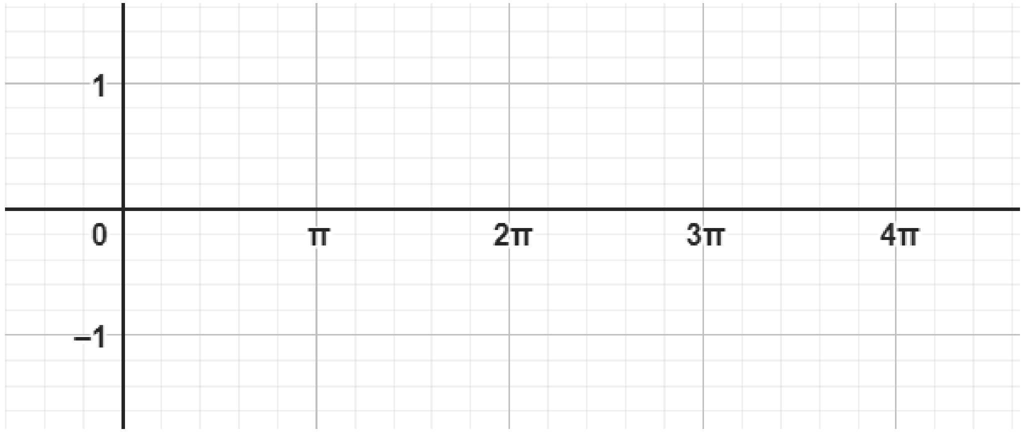
a) $sen\ (390°) =$

b) cos $\left(\frac{13\pi}{3}\right) =$

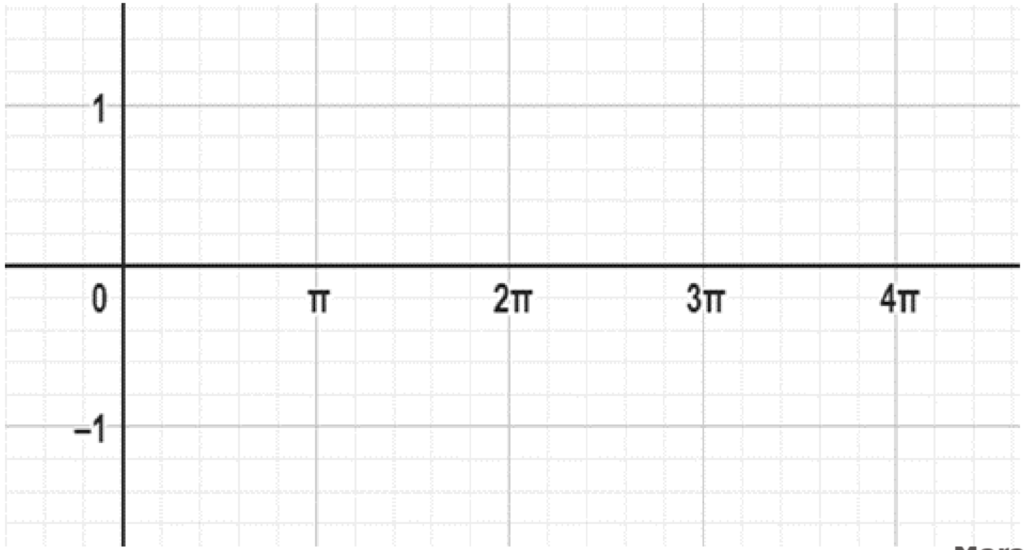
c) $tg(1125°) =$

7. Construa o gráfico de cada função trigonométrica a seguir:

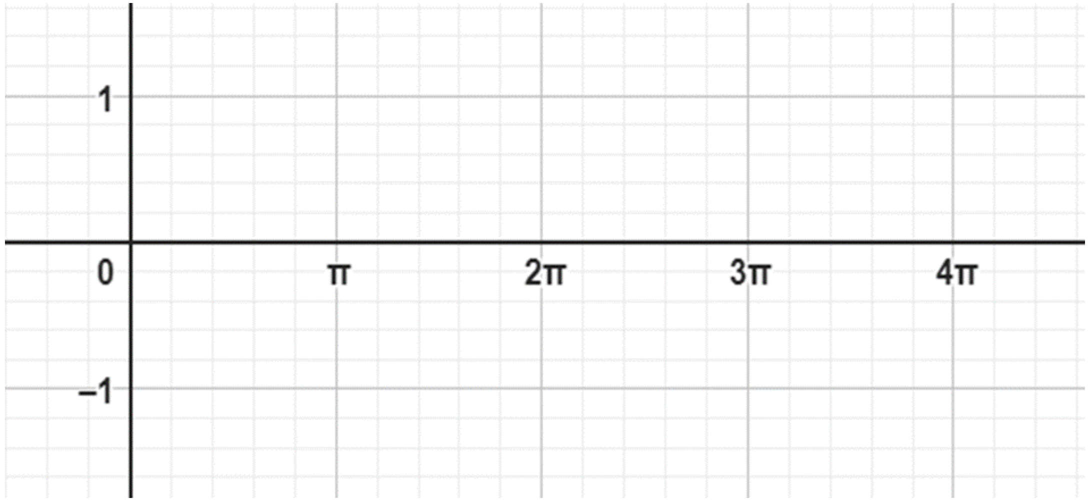
a) $f(x) = sen(x)$



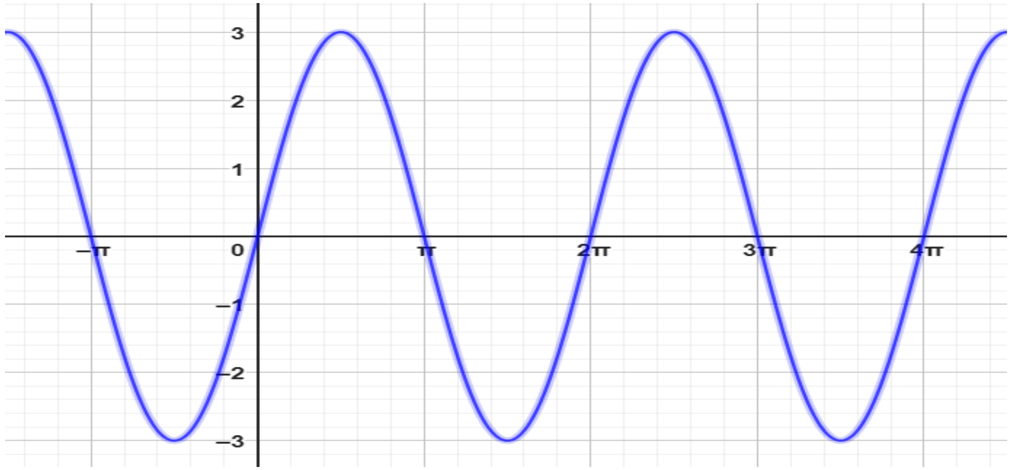
b) $f(x) = cos(x)$



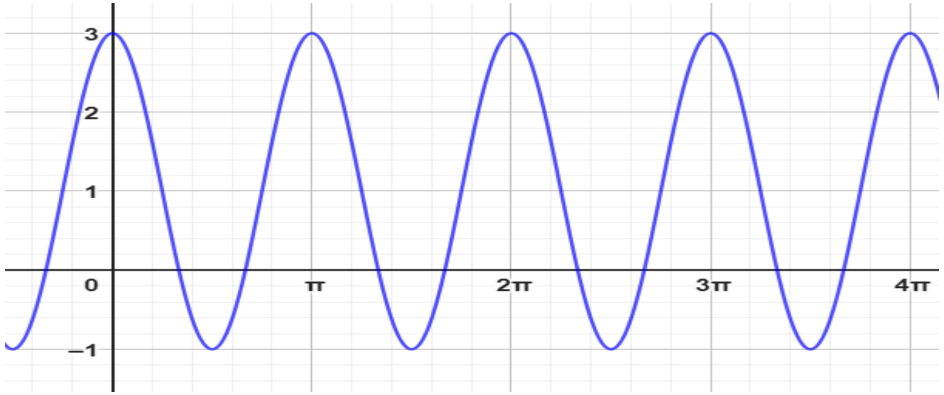
c) $f(x) = tg(x)$



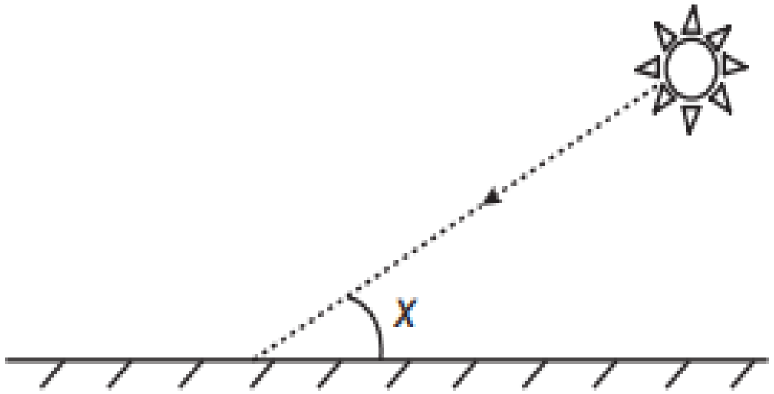
8. Considerando o gráfico da função a seguir, obtidas a partir de $f(x) = a + b \cdot sen(cx + d)$, determine os valores de a, b, c e d:



9. Considerando o gráfico da função a seguir, obtidas a partir de $f(x) = a + b \cdot cos(cx + d)$, determine os valores de a, b, c e d:



10. (ENEM 2017) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = \kappa \cdot sen(x)$, sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90°.



Quando x = 30º, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

(A) 33%

(B) 50%

(C) 57%

(D) 70%

(E) 86%

11. (ENEM 2015) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que
apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.
A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5 \cdot cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

(A) janeiro.

(B) abril.

(C) junho.

(D) julho.

(E) outubro.

12. (ENEM 2017) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e K são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

(A) $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$

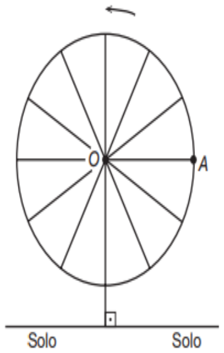
(B) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$

(C) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$

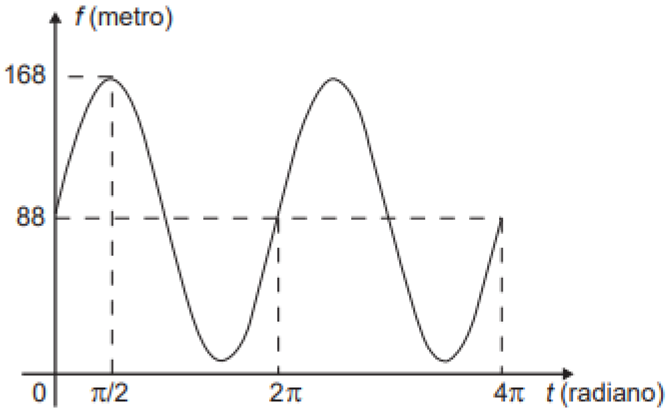
(D) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$

(E) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$

13. Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Sejam t o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A, em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por

(A) $f(t) = 80sen(t) + 88$

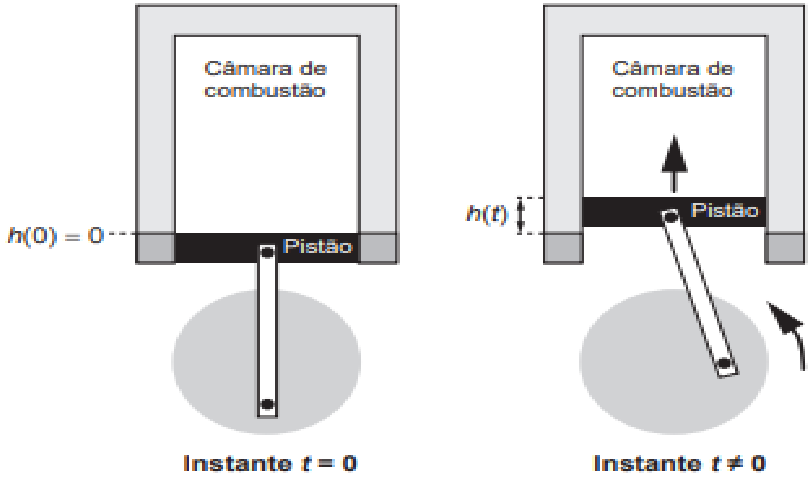
(B) $f(t) = 80cos(t) + 88$

(C) $f(t) = 88cos(t) + 168$

(D) $f(t) = 168sen(t) + 88cos(t)$

(E) $f(t) = 88sen(t) + 168cos(t)$

14. Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.



A função $h(t) = 4 + 4 \cdot sen\left(\frac{\beta \cdot T}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura h, medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos.

O valor do parâmetro β , que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante t = 0), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π.

O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β , de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

(A) 1.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 5.

(E) 8.